

Série : E  
N° D'ORDRE : 136  
A O 5136

# THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND

POUR OBTENIR

LE GRADE DE

DOCTEUR-ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

**François BLANC**

Ingénieur du CNRS

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE  
LA PROPAGATION GUIDÉE EN MILIEU ANISOTROPE

Soutenue publiquement le février 1971 devant la commission d'examen

|                        |                            |
|------------------------|----------------------------|
| M. A. GOZZINI, Dr. HC, | <i>Président d'honneur</i> |
| M. G. RAOULT           | <i>Président</i>           |
| M. L. AVAN             | } <i>Examineurs</i>        |
| M. R. COMBE            |                            |
| M. R. FANGUIN          |                            |







Série : E  
N° D'ORDRE : 136

A O 5136

# THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND

POUR OBTENIR

LE GRADE DE

DOCTEUR-ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

**François BLANC**

Ingénieur du CNRS

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE  
LA PROPAGATION GUIDÉE EN MILIEU ANISOTROPE

Soutenue publiquement le février 1971 devant la commission d'examen

|                        |                            |
|------------------------|----------------------------|
| M. A. GOZZINI, Dr. HC, | <i>Président d'honneur</i> |
| M. G. RAOULT           | <i>Président</i>           |
| M. L. AVAN             | } <i>Examineurs</i>        |
| M. R. COMBE            |                            |
| M. R. FANGUIN          |                            |

# THÈSE

PRÉSENTÉE

À LA FACULTÉ DES SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND

Pour obtenir

LE GRADE DE

DOCTEUR-ES-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

François BLANC

né le 10/05/1978

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DE  
LA PROPAGATION GUIDÉE EN MILIEU ANISOTROPE



Document communiqué par le service de la bibliothèque de la faculté

M. A. GUTZKE, D. H. L. Président du jury  
M. D. RAULT  
M. J. VAN  
M. R. COMTE  
M. R. LANGST



UNIVERSITE DE CLERMONT-FERRAND  
FACULTE DES SCIENCES

---

Doyen : M. KOHLMULLER  
Assesseur : M. CHADEYRAS

PROFESSEURS

|                              |                          |
|------------------------------|--------------------------|
| M. RAMBAUD René              | Chimie                   |
| M. BLANC Eugène              | Mathématiques Pures      |
| M. ROQUES Maurice            | Géologie                 |
| M. LAPADU-HARGUES            | Minéralogie              |
| M. LUTZ Hubert               | Biologie Animale         |
| M. RAOULT Gaston             | Physique                 |
| M. CHAMPAGNAT Paul           | Physiologie Végétale     |
| M. DUPLESSIS-KERGOMARD Alain | Chimie                   |
| M. AVAN Jean-Louis           | Physique Expérimentale   |
| Mme HENNEQUIN Françoise      | Mathématiques Pures      |
| Mlle BERTHET Ginette         | Physique                 |
| M. LOISEAU Jean              | Botanique                |
| M. COMBE René                | Physique                 |
| M. DE PUYTORAC Pierre        | Zoologie                 |
| Mme AVAN Madeleine           | Physique                 |
| Mlle DONDON Marie-Louise     | Chimie Physique          |
| M. DELOST Paul               | Physiologie Animale      |
| M. VIALARD André             | Chimie                   |
| M. KOHLMULLER Robert         | Chimie Minérale          |
| M. GUILLAUME Marcel          | Algèbre                  |
| M. COMBE Jean                | Physique                 |
| M. HENNEQUIN Paul            | Mathématiques Appliquées |
| M. L'HERITIER Philippe       | Génétique                |
| M. VESSIERE Roger            | Chimie Organique         |
| M. BAILLAUD Lucien           | Botanique                |
| M. JOYON Louis               | Zoologie I.U.T.          |
| M. BERNARD Maurice           | Physique                 |





## PROFESSEUR ASSOCIE

M. ROCCOS Pantelis

Mathématiques Pures

## PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. PETERLONGO Jean-Marc

Géologie

M. BATHIER Marcel

Physique

Mlle DUCHER Suzanne

Chimie

M. FALGAS Maurice

Mathématiques Pures

M. ROCHE Jean

Physique I.U.T.

M. MARTINET Pierre

Chimie

M. MAISONNEUVE Jacques

Géologie

M. CAPESTAN Michel

Chimie

M. LENOIR Marcel

Mathématiques Pures

M. THOMAS Jean

Physique

M. ISABELLE Didier

Physique

M. CAUBERE Paul

Chimie

M. SOULAGE René

Géophysique Générale

M. COURDUROUX Jean-Claude

Botanique

## MAITRES DE CONFERENCES

M. DUFAURE Jean-Pierre

Zoologie

M. BADRIKIAN Albert

Mathématiques Appliquées

M. GRAIN Jean

Zoologie

Mme BESSERRE Anne-Marie

Mathématiques Pures

M. JEAN Claude

Physiologie Animale

M. LE THAN PHONG

Mathématiques Pures

M. MIGNOT Jean-Pierre

Zoologie

M. VELLE Georges

Psycho-Physiologie

M. COUSSEINS Jean-Claude

Chimie

M. LEMAIRE Jacques

Chimie

M. CHADEYRAS Marcel

Mathématiques Pures

M. BOILLAT Guy

Mathématiques Pures

M. CADORET Robert

Physique

M. LE MEN François

Physique

M. GAGNY Claude

Géologie

M. LEVY Philippe

Génie Electrique I.U.T.

M. PRORIOLE Joseph

Génie Mécanique I.U.T.





|    |                   |                            |
|----|-------------------|----------------------------|
| M. | ROCHE Guy         | Génie Electrique I.U.T.    |
| M. | GUILLOT Albert    | Biologie Appliquée I.U.T.  |
| M. | FANGUIN René      | Physique I.U.T.            |
| M. | NIGOND Jacques    | Agronomie I.U.T.           |
| M. | LARPENT Jean-Paul | Microbiologie Appliquée    |
| M. | BESSERRE Daniel   | Spectroscopie              |
| M. | ACKERMANN Patrick | Electronique-Automatique   |
| M. | LHOMME Jean       | Chimie des Substances Nat. |
| M. | AUSLENDER Alfred  | Mathématiques Appliquées   |

#### CHARGES D'ENSEIGNEMENT

|    |                            |                                         |
|----|----------------------------|-----------------------------------------|
| M. | COFFI N'KETSIA Barben Jean | Mathématiques Pures                     |
| M. | LETAC Gérard               | Mathématiques et<br>Informatique I.U.T. |

#### MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIE

|     |               |                      |
|-----|---------------|----------------------|
| Mme | PAVEL Liliane | Mathématiques I.U.T. |
|-----|---------------|----------------------|

#### ATTACHEE PRINCIPALE

|     |                      |
|-----|----------------------|
| Mme | CHOPART Marie-Louise |
|-----|----------------------|

Mathématiques appliquées I.U.F.  
 Chimie des substances naturelles  
 Électrochimie  
 Microbiologie appliquée  
 Agronomie I.U.F.  
 Physique I.U.F.  
 Biologie appliquée I.U.F.  
 Génie électrique I.U.F.

M. ROCHÉ Guy  
 M. GUILLOT Albert  
 M. FANQUIN René  
 M. WIGNON Jacques  
 M. LARRENT Jean-Paul  
 M. BASSERRE Daniel  
 M. KOCKERMAN Patrick  
 M. LOMME Jean  
 M. AULENDER Alfred

CHARGES D'ENSEIGNEMENT

Mathématiques pures  
 Mathématiques appliquées  
 Informatique I.U.F.

M. BOFFI NIKETIA Barben Jean  
 M. LÉVES Géraud

LISTE DE CONCURRENCE ASSOCIÉE

Mathématiques I.U.F.

Mme PAVEL Liliane

ATTACHÉ PRINCIPALE

Mme CHOPART Marie-Louise



A mon maître,

Monsieur le Professeur G. RAOULT

A mon meilleur ami,

Monsieur R. FANGUIN

A mes parents

1871

1871

1871

1871

1871



Je prie Monsieur le Professeur C. RAHILT de bien vouloir trouver ici l'expression de ma profonde reconnaissance ; en effet il m'a permis d'entreprendre et de mener à bonne fin ce travail grâce à sa compréhension attentionnée et des directives qui m'ont permis de vaincre des difficultés que beaucoup jugeaient insurmontables.

J'exprime ma très respectueuse gratitude à Monsieur le Professeur A. COZZINI de l'Université de Pise qui a bien voulu venir juger ce travail malgré ses lourdes charges. Les travaux et exposés qu'il a présentés aux divers Colloques A.U.P.E.R.E. m'ont guidé et fourni les premières bases de mes recherches dans le domaine des ondes centimétriques.

Je témoigne une sincère reconnaissance à Monsieur le Professeur L. AVAN qui a bien voulu faire partie de la commission d'examen et a toujours manifesté un bienveillant intérêt pour mes travaux, concrétisé par l'aide bibliographique que l'A.U.P.E.R.E. m'a apportée grâce à son initiative.

J'adresse tous mes remerciements à Monsieur le Professeur P. COMBE qui a bien voulu faire partie du Jury et dont les travaux et l'enseignement m'ont été fort utiles tout au long de mes recherches théoriques.

Je tiens à remercier très sincèrement Monsieur R. FANQUIN, Maître de Conférence à l'Institut Universitaire de Technologie dont les connaissances en optique ultra-hertzienne et l'aide constante et inlassable m'ont permis de résoudre les multiples problèmes auxquels je me suis heurté tout au long de ce travail.

Je tiens à remercier chaleureusement mon père, A. DUBAS, A.M. CAVAIX, A. et A.M. VASSON pour l'importante tâche dont ils ont bien voulu se charger en relisant le texte, corrigeant les épreuves ou exécutant les nombreux dessins.

Je suis reconnaissant à tous mes camarades de laboratoire, notamment R. BESSECE, A. BOUCHE, D. PPAVOUX qui ont effectué la plupart des mesures ayant conduit à tous les résultats expérimentaux.

Je remercie également M. PELLET et A. THOMASSON ainsi que tous leurs camarades techniciens dont la maîtrise technique et le goût du travail bien fait m'ont permis de disposer de toutes les pièces de précision qu'exigeaient mes montages. Mes remerciements vont aussi à M. ROUGANNE et aux membres de l'imprimerie de la Faculté qui ont eu la lourde tâche de dactylographier et d'imprimer ce mémoire.

...the ... of ...

...the ... of ...

...the ... of ...

...the ... of ...

...the ... of ...

...the ... of ...

...the ... of ...

...the ... of ...

...the ... of ...



./...

Enfin mes remerciements vont à G. CORNET dont les travaux mathématiques sur les équations de Bessel m'ont été fort utiles ainsi qu'à J. BRUSTEL, N. COULEUVRE et R. CALINON qui m'ont apporté une aide précieuse lors de la mise au point de certains passages théoriques.

-:-:-:-





# S O M M A I R E

= = = = =

|                                                                                                                                                     |        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| Introduction                                                                                                                                        | p. 1   |
| Chapitre I - GENERALITES SUR LES DISPOSITIFS D'ETUDE                                                                                                | p. 4   |
| Chapitre II - ETUDE PAR REFLEXION OBLIQUE D'ECHANTILLONS<br>ABSORBANTS ANISOTROPES                                                                  | p. 14  |
| ANNEXE MATHEMATIQUE                                                                                                                                 | p. 29  |
| Chapitre III - ETUDE PAR TRANSMISSION D'ECHANTILLONS<br>TRANSPARENTS AUX ONDES CENTIMETRIQUES                                                       | p. 32  |
| Chapitre IV - ETUDE DE LA PROPAGATION D'UNE ONDE ELECTRO-<br>MAGNETIQUE DANS UN GUIDE DE SECTION<br>RECTANGULAIRE REMPLI D'UNE SUBSTANCE ANISOTROPE | p. 42  |
| Chapitre V - ETUDE DE LA PROPAGATION D'UNE ONDE ELECTRO-<br>MAGNETIQUE DANS UN GUIDE CYLINDRIQUE REMPLI<br>D'UNE SUBSTANCE ANISOTROPE               | p. 59  |
| ANNEXE MATHEMATIQUE                                                                                                                                 | p. 84  |
| Chapitre VI - LE MONTAGE HYPERFREQUENCE                                                                                                             | p. 86  |
| Chapitre VII - LE CHAMP MAGNETIQUE                                                                                                                  | p. 111 |
| Chapitre VIII- RESULTATS EXPERIMENTAUX                                                                                                              | p. 129 |
| Conclusion                                                                                                                                          | p. 136 |
| Bibliographie                                                                                                                                       | p. 139 |

-----

10

2

4.

1

7.

10

C.

## I N T R O D U C T I O N

-----

Depuis fort longtemps, les radiations électromagnétiques fournissent les sujets de très nombreuses études dans divers domaines de la physique, parmi lesquels il convient de citer l'optique et la radioélectricité. Cependant, malgré l'unicité de leur nature, montrée théoriquement par les équations de Maxwell, la diversité des recherches entreprises et des phénomènes étudiés justifie les travaux de Nichols et Tear qui montrèrent, à la fin du siècle dernier, l'identité des ondes radioélectriques et des radiations lumineuses.

Les ondes radioélectriques ont surtout été utilisées et étudiées en vue des télécommunications, tandis qu'en optique était étudié en laboratoire le comportement des ondes lumineuses lors de leur passage dans des substances anisotropes. De même, les phénomènes d'interaction entre onde et matière se traduisirent par exemple en radioélectricité par les travaux sur la résonance magnétique d'une part, en optique par l'étude de l'effet Zeeman et de ses applications d'autre part.

Ce sont ces phénomènes d'interaction qui donnèrent naissance à l'optique ultra-hertzienne qui se propose de faire, avec des ondes radioélectriques, des études analogues à celles de l'optique classique. Cette idée fut proposée en 1949 par A. Kastler (1, 2) et peu après de nombreux chercheurs entreprirent des études théoriques (3, 4, 5) et expérimentales (6, 7, 8, 9) des effets magnéto-optiques. Mais les phénomènes quantiques ne sont pas les seuls pouvant donner lieu à des études d'optique ultra-hertzienne. Ainsi, des travaux portant sur l'étude de modèles radioélectriques de structures étudiées en optique sont menés par plusieurs auteurs (10, 11, 12). On peut donc penser qu'en optique ultra-hertzienne la propagation des ondes centimétriques utilisées est susceptible d'offrir un vaste champ de recherche, puisqu'on peut faire coexister et transposer les recherches propres à la propagation, soit des radiations lumineuses, soit des ondes radioélectriques.

Ces recherches présentent des buts et des formes multiples déterminés par le domaine de la physique et en rapport avec l'ordre de grandeur





de la longueur d'onde. On peut les classer en trois groupes :

a) Pour les ondes radioélectriques classiques, on a surtout développé l'étude de leur propagation en espace libre dans l'atmosphère ou dans les couches ionisées, le but de ces travaux étant surtout le perfectionnement des systèmes de télécommunication et de recherches géophysiques.

b) Pour les ondes hertziennes de plus faible longueur d'onde, on s'est plutôt attaché à étudier leur propagation guidée. On a tout d'abord examiné le comportement des ondes centimétriques ou millimétriques dans des guides lisses, puis les recherches se sont dirigées vers l'étude des guides chargés ou corrugués (13, 14, 15) ou vers la mesure, pour ces longueurs d'onde, des permittivités de substances isotropes, en particulier à 10 GHz (16, 17).

c) Enfin, pour les radiations lumineuses de longueur d'onde encore plus courte, les recherches ont eu pour but principal d'étudier les modifications de structure subies par l'onde lors de sa propagation dans un milieu anisotrope.

Il est évident que des recherches de ce dernier type sont très intéressantes pour la connaissance des propriétés de la matière et il est logique d'essayer de les reprendre pour des ondes centimétriques ou millimétriques. Pour ces dernières, les méthodes optiques, par réflexion ou par transmission, en espace libre, peuvent être utilisées sans trop de difficultés et on a ainsi mesuré certaines constantes diélectriques (18, 19). Malheureusement, en raison de l'important écart de longueur d'onde existant entre ondes lumineuses et ondes centimétriques, il n'est pas possible de transposer au domaine de ces dernières sans modifications les méthodes employées en optique. En effet, en raison des très courtes longueurs d'ondes utilisées, la propagation s'effectue toujours dans les conditions de l'espace libre illimité, même dans un échantillon de petites dimensions, tandis que dans le cas des ondes centimétriques il faudrait, pour se placer dans des conditions analogues, des appareillages dont l'encombrement dépasserait rapidement les limites compatibles avec l'expérimentation. Il est donc nécessaire d'envisager en espace limité la propagation de l'onde centimétrique dans un milieu anisotrope en propagation guidée. C'est pourquoi nous avons choisi comme but de nos recherches l'étude théorique et la mise au point expérimentale d'une méthode polarimétrique ultra-hertzienne guidée pour l'étude de substances anisotropes. On peut ainsi déterminer l'ellipsoïde





des permittivités par une voie quelque peu différente de celles employées généralement aux fréquences voisines de 10 GHz (20, 21, 22).

Ces travaux, dont l'exposé est fait dans ce mémoire, peuvent être décomposés en plusieurs parties :

a) Choix du dispositif de mesure en fonction du corps étudié, l'anisotropie pouvant être naturelle ou induite.

b) Etude théorique de la méthode par réflexion oblique destinée aux substances absorbantes et soumises à un champ magnétique (ou électrique), transversal.

c) Théorie de la méthode par transmission utilisée pour les corps à faibles pertes et que l'on peut diviser en deux parties :

- étude du dispositif et des phénomènes de réflexion sur les faces de la lame examinée dont il faut tenir compte pour interpréter correctement les résultats polarimétriques obtenus ;

- étude de la propagation d'une onde dans un guide de section rectangulaire ou circulaire rempli d'un corps anisotrope ayant pour objet la détermination des vitesses de phase.

d) Description du montage expérimental.

e) Exposé de quelques travaux et résultats obtenus par notre méthode polarimétrique :

- étude par transmission de la biréfringence des quartz rubis et TGS ;
- réflexion oblique sur une surface réfléchissante en cuivre ;
- phénomènes de réflexion magnéto-optique sur une ferrite.

C'est dans cet ordre que nous allons examiner, tant sur le plan théorique qu'expérimental, la méthode polarimétrique que nous avons mise au point et dont nous donnons quelques exemples d'utilisation.

-----



## CHAPITRE I

=====

### GENERALITES SUR LES DISPOSITIFS D'ETUDE

Pour étudier l'anisotropie présentée aux ondes centimétriques par certaines substances de façon naturelle ou induite, les problèmes à résoudre sont de même nature que ceux rencontrés lors de travaux analogues en optique. On peut les classer en plusieurs groupes, que nous allons examiner successivement.

1°) Production d'une onde centimétrique guidée, douée d'une structure spatiale telle qu'elle permette de définir une direction de polarisation pour la radiation considérée.

2°) Interposition de l'échantillon sur le trajet de l'onde à étudier de façon à modifier la structure.

3°) Analyse de la structure de l'onde perturbée.

#### I - PRODUCTION DE L'ONDE POLARISEE INCIDENTE

De nombreux ouvrages (23, 24, 25) exposent en détail ce qui se passe dans un guide d'onde vide de section rectangulaire ou circulaire. En résolvant dans chaque cas particulier les équations de Maxwell, on obtient les expressions des composantes spatiales des champs électrique et magnétique et on constate alors qu'une onde de pulsation donnée  $\omega$  peut se propager selon plusieurs modes. A chacun d'eux correspond une structure particulière des champs et une constante de propagation  $\gamma$  liée à la pulsation de l'onde et aux dimensions transversales du guide. Cette relation permet de définir pour chaque mode une longueur d'onde limite  $\lambda_c$ , dite de coupure, au-delà de laquelle le mode considéré cesse de se propager.

Si l'on se place dans des conditions telles que, pour l'onde choisie, seul existe le mode ayant la plus grande longueur d'onde de coupure, l'onde présente à l'intérieur du guide une structure

simple, que nous rappelons ci-dessous pour un guide de section soit rectangulaire, soit circulaire,  $\vec{k}$  étant le vecteur d'onde et  $Z$  l'impédance d'onde :

./...





a) Guide de section rectangulaire. Mode  $TE_{10}$  (fig. I, 1)

L'origine des coordonnées étant située sur une arête du guide, on a :

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = -E_0 \sin \alpha x e^{j(\omega t - \gamma z)} \\ E_z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_x = \frac{\gamma}{KZ} E_0 \sin \alpha x e^{j(\omega t - \gamma z)} \\ H_y = 0 \\ H_z = -\frac{j(K^2 - \gamma^2)}{KZ} E_0 \cos \alpha x e^{j(\omega t - \gamma z)} \end{cases}$$

$$\text{avec } \lambda_c = 2a \quad \text{et } \alpha = \frac{\pi}{a}$$

b) Guide de section circulaire. Mode  $TE_{11}$  (fig. I, 2)

$$\begin{cases} E_\rho = j H_0 \frac{KZ}{a_1^2 \rho} J_1(\alpha \rho) \sin \varphi e^{j(\omega t - \gamma z)} \\ E_\varphi = j H_0 \frac{KZ}{\alpha a_1} J'_1(\alpha \rho) \cos \varphi e^{j(\omega t - \gamma z)} \\ E_z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_\rho = -j H_0 \frac{\gamma}{a_1} J'_1(\alpha \rho) \cos \varphi e^{j(\omega t - \gamma z)} \\ H_\varphi = j H_0 \frac{\gamma}{a_1 \rho} J_1(\alpha \rho) \sin \varphi e^{j(\omega t - \gamma z)} \\ H_z = H_0 J_1(\alpha \rho) \cos \varphi e^{j(\omega t - \gamma z)} \end{cases}$$

avec  $\lambda_c = 3,41 R$  et  $a_1$  ayant une valeur telle que  $a_1 R$  soit la première racine non nulle de  $J'_1$ . L'onde dont on dispose ainsi est transverse-électrique, et son champ électrique présente ou bien une direction constante ou bien un axe de symétrie où son amplitude est maximale. Par analogie avec la lumière, cette direction ou cet axe permet de définir l'équivalent de la direction de polarisation.

Dans un guide cylindrique, en raison de sa symétrie de révolution, la direction de polarisation peut être quelconque et la composition de deux vibrations déphasées et de polarisation différente donne l'équivalent d'une onde elliptique. Par contre, dans un guide de section rectangulaire,





# MODE $TE_{1,0}$

→ champ électrique  
→ champ magnétique

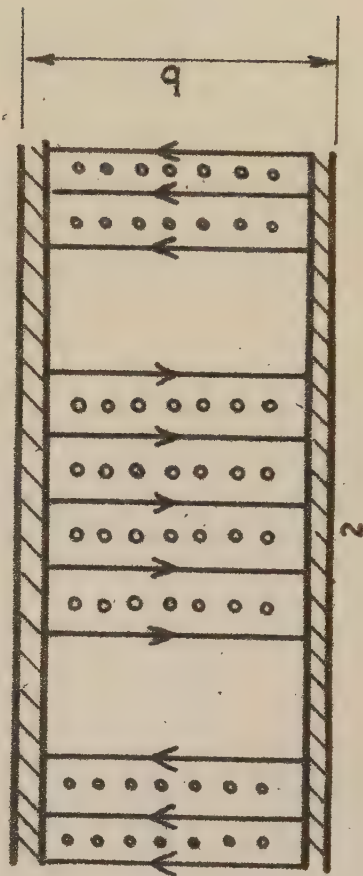
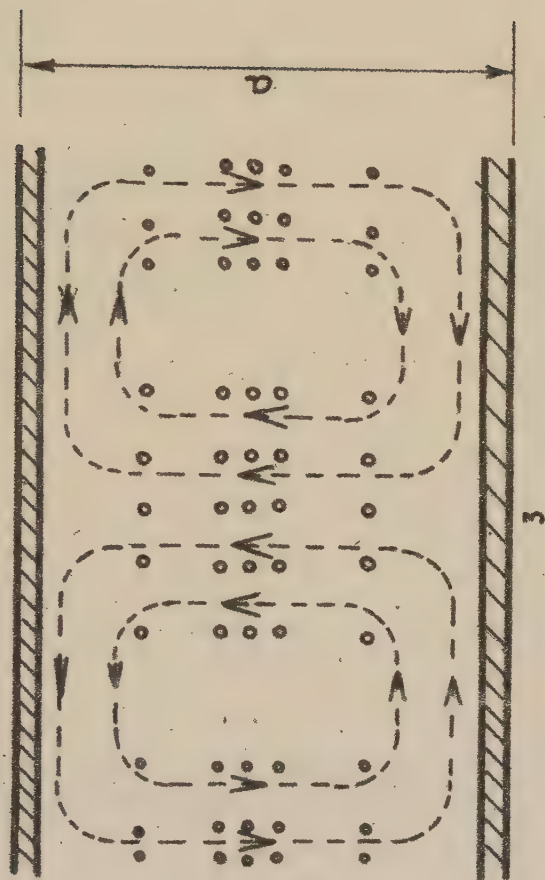
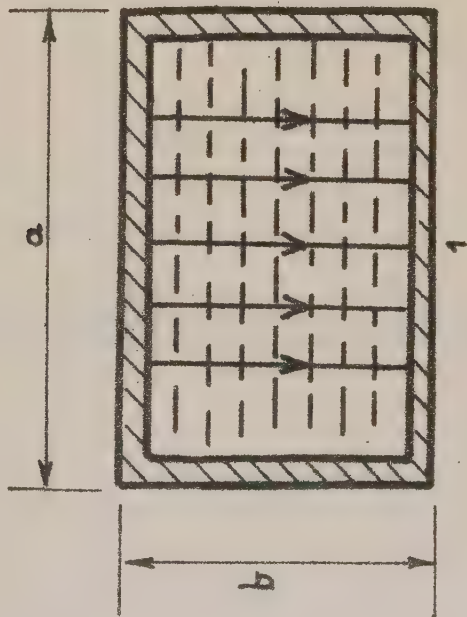
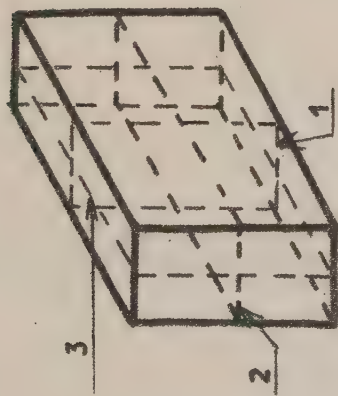


fig 1 - 1



# MODE TE<sub>1.1.</sub>

→ champ électrique  
 ---→ champ magnétique

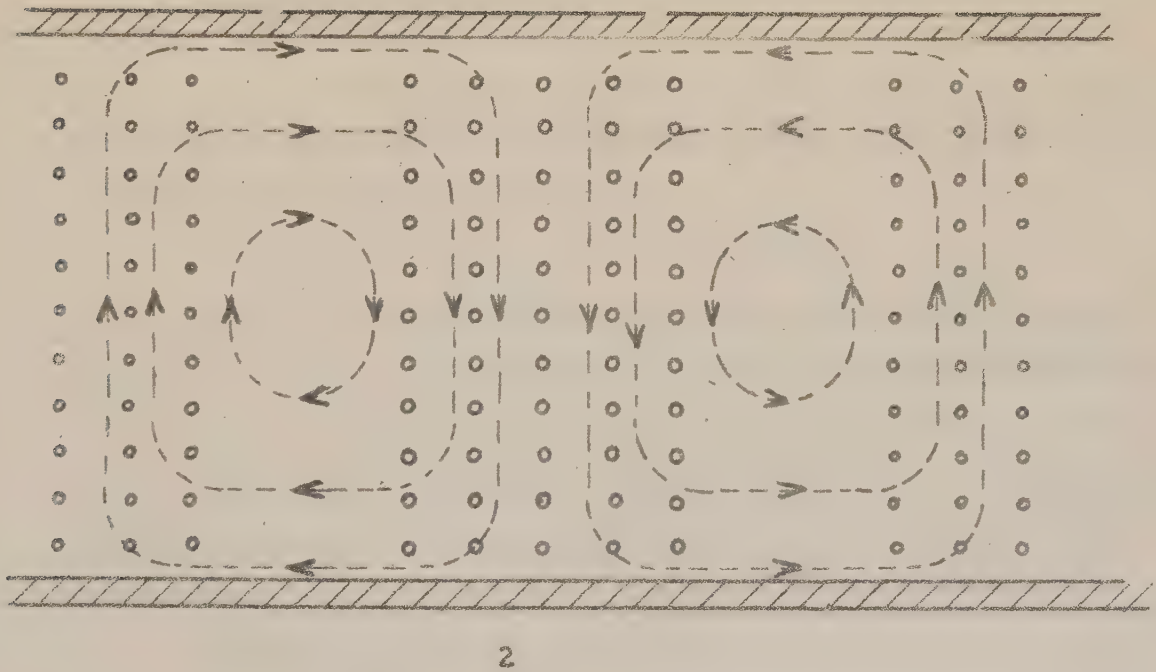
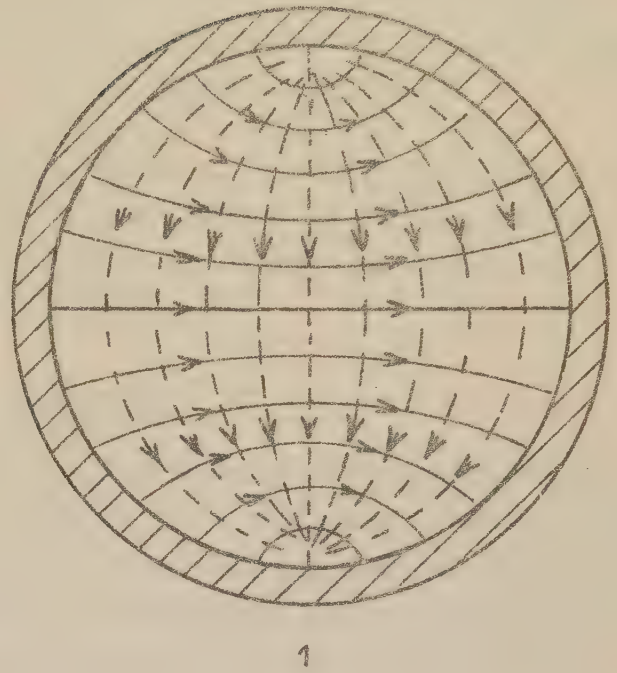
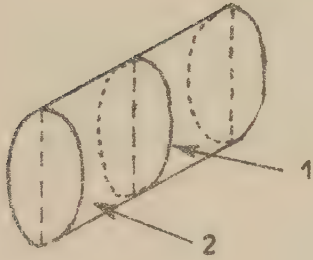


fig 1 - 2





une onde  $TE_{10}$  présente une polarisation fixe si le mode  $TE_{01}$  ne peut exister. Mais si le guide est de section carrée, les modes  $TE_{10}$  et  $TE_{01}$  peuvent co-exister et leur composition permet d'obtenir l'équivalent soit d'une onde à polarisation quelconque, soit d'une vibration elliptique.

Comme nous voulons pouvoir disposer d'une onde incidente dont on puisse faire tourner la direction de polarisation, il est nécessaire d'utiliser un guide de section circulaire ou carrée, pour acheminer la vibration électromagnétique vers l'échantillon.

## II - DISPOSITION DE L'ECHANTILLON

La vibration polarisée incidente donne naissance, lorsqu'elle frappe la surface d'entrée de l'échantillon, à deux ondes, l'une réfléchie, l'autre pénétrant dans la lame, qui vont se propager dans le système de guides situés de part et d'autre de l'échantillon. Il est donc possible de réaliser l'appareillage de façon à analyser l'une ou l'autre de ces vibrations.

### a) Etude par réflexion

-----

L'angle d'incidence est un paramètre dont on est libre de choisir la valeur lors de la réalisation du montage et on peut alors distinguer deux types de dispositifs :

#### 1°) Réflexion sous incidence normale :

Dans ce montage l'échantillon est placé en bout de guide, la face d'entrée étant perpendiculaire à l'axe du système, et l'on étudie la structure de l'onde réfléchie qui se propage parallèlement en sens opposé à la vibration incidente. Cette méthode a permis la réalisation de dispositifs très perfectionnés dont la grande sensibilité et l'excellente précision autorisent des mesures de rotation et d'ellipticité très faibles (8).

#### 2°) Réflexion oblique :

Lorsqu'on utilise la disposition précédente à incidence normale, l'onde réfléchie se propage dans le même guide que l'onde incidente. Bien qu'il soit ainsi possible de mettre à profit la combinaison de l'onde incidente avec celle réfléchie, à l'aide d'ingénieux montages, il nous semble plus simple d'utiliser une réflexion sous incidence oblique.





En effet, dans ce cas, l'onde réfléchiée a une direction différente de celle de la vibration incidente et son analyse s'effectue avec un appareillage un peu moins complexe.

Pour des raisons mécaniques, nous avons choisi une incidence de  $45^\circ$ , ce qui fait que le guide acheminant la vibration incidente et le guide transmettant à l'analyseur la vibration réfléchiée sont perpendiculaires l'un à l'autre. La lame constituant l'échantillon est placée normalement au plan contenant les guides et fait un angle de  $45^\circ$  avec l'axe de chacun.

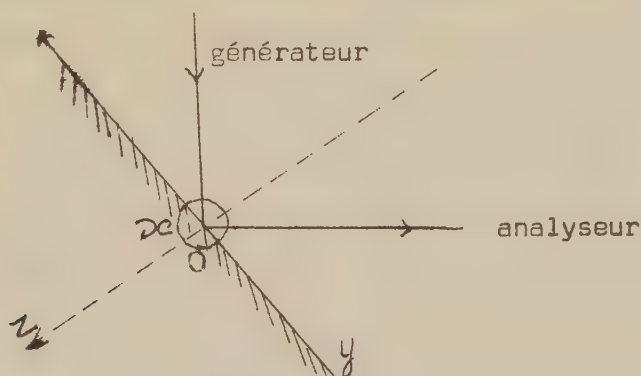


Fig. I - 3

Nous avons vérifié que seule l'onde réfléchiée par le miroir se propage dans le guide récepteur, et qu'elle n'est donc pas perturbée par d'autres vibrations.

Pour effectuer ce contrôle, nous avons enlevé la lame réfléchissante et placé le dispositif de façon à ne pas être gêné par des réflexions sur des obstacles extérieurs au montage. Dans ces conditions, il ne nous a pas été possible de détecter l'existence d'une onde se propageant dans le guide récepteur, même en utilisant comme appareil de mesure un indicateur de T.O.S. FERISOL AG 220 ou un microvoltmètre PHILIPS GM 6020/03.

L'onde réfléchiée est composée de celle due à la réflexion sur le dioptre plan d'entrée de la lame et de celle due à la face arrière. Cette dernière réflexion perturbe la structure de l'onde à analyser et l'on a intérêt à réduire au minimum son influence. C'est pourquoi cette méthode par réflexion est surtout destinée à l'étude de matériaux absorbants, parmi lesquels on peut citer les ferrites pour basse fréquence et à faible résistivité et les corps dipolaires optiquement actifs. Si l'on veut une précision voisine de 1 %, il faut alors prendre une épaisseur



minimale  $\lambda$  telle que :  $A \times \lambda$  soit supérieur à 2 ou 3,  $A$  étant l'atténuation linéaire de l'échantillon. La disposition mécanique de ce montage permet de le placer facilement dans l'entrefer d'un électro-aimant. Le champ appliqué est alors équatorial, dirigé suivant  $Ox$ , et l'on peut ainsi étudier soit des corps gyromagnétiques soumis à un champ transverse, soit des substances dipolaires susceptibles de donner des phénomènes de biréfringence magnétique.

Dé même, cette disposition permettrait la réalisation facile d'un support équipé de deux armatures conductrices parallèles au plan d'incidence, et il serait alors possible d'appliquer à la substance étudiée un champ électrique transversal. Ceci permet d'envisager des recherches relatives à la biréfringence électrique plus commodément que par les méthodes par transmission utilisées pour mettre en évidence ces phénomènes (26).

#### b) Etude par transmission

-----

Au lieu d'analyser la vibration réfléchie par l'échantillon, on peut s'intéresser à l'onde qui traverse la lame étudiée. Elle occupe une portion de guide du montage et il est évident que cette disposition rend les mesures d'autant plus difficiles que l'échantillon absorbe plus d'énergie, ce qui oblige certains expérimentateurs à travailler en impulsion (26). C'est pourquoi, il nous semble que cette méthode est à employer de préférence pour des mesures sur des corps transparents aux ondes centimétriques.

C'est sur ce principe que sont réalisés plusieurs appareillages destinés à l'étude de l'effet Faraday que présentent les matériaux gyromagnétiques au voisinage d'une raie de résonance (9, 27). Quant à nous, nous utilisons un montage par transmission pour examiner l'anisotropie que possèdent les cristaux uniaxes dans le domaine des ondes centimétriques (28).

Mais les dioptries que forment les plans de séparation entre le guide vide et la portion remplie par l'échantillon sont le siège de réflexions, et l'échantillon est soumis à un phénomène d'ondes réfléchies multiples, d'autant plus important que la substance étudiée offre moins d'atténuation à l'onde. Ce fait est très gênant, surtout pour les phénomènes non réciproques de résonance gyromagnétique, et les





expérimentateurs cherchent à rendre unique la traversée de la lame par l'onde. Pour obtenir ce résultat, ils cherchent à éviter les réflexions en disposant des lames quart d'onde de part et d'autre de l'échantillon, ce qui revient sur le plan radioélectrique à adapter la portion de guide contenant la lame étudiée au reste de la ligne de mesure (9, 29).

Nous avons essayé au Laboratoire de procéder d'une façon analogue pour adapter des lames de quartz taillées parallèlement à l'axe, (30) mais l'étude de l'anisotropie en fonction de la longueur d'onde oblige à prévoir plusieurs ensembles de lames anti-reflets qu'il est alors plus difficile de déterminer judicieusement que pour une expérience faite à fréquence fixe comme celle de résonance gyromagnétique.

Il nous a donc paru plus simple de tenir compte de l'existence des ondes multiples plutôt que de tenter de réaliser systématiquement des dispositifs d'adaptation dont l'effet, même à la fréquence optimale, ne peut pas être identique pour l'une et l'autre vibrations existant dans le cristal uniaxe (31).

Nous examinerons donc plus loin les travaux relatifs à ce sujet qui ont été menés dans notre Laboratoire. Cette étude a pour but de déterminer la structure de l'onde émergente lorsqu'on la considère comme la résultante des vibrations transmises après chaque réflexion. On obtient ainsi, pour chacune des deux vibrations transmises, l'expression de leur amplitude et de leur déphasage, compte tenu du coefficient de réflexion sur les dioptries. Comme on peut lier ce dernier aux paramètres caractéristiques de chaque partie du guide, l'une vide, l'autre renfermant l'échantillon, l'expression mathématique finale de chaque vibration ne comporte plus que des paramètres connus (dépendant du montage) ou à déterminer (permittivité de l'échantillon). Un calcul classique exprime finalement la rotation et l'ellipticité de la vibration analysée due à la composition des deux ondes transmises. Il est alors possible de déterminer par un calcul numérique les valeurs de la permittivité de l'échantillon.

### III - ANALYSE DE L'ONDE EMERGENTE

L'onde incidente polarisée que nous envoyons sur la lame anisotrope donne donc naissance à une vibration réfléchie ou transmise, dont



on va mesurer la rotation et l'ellipticité. Diverses méthodes d'analyse peuvent être envisagées ; on peut les décomposer en trois grandes catégories :

A) Analyseur à terminaison turnstile -

Dans un tel appareil analyseur, on met à profit le fait qu'il est possible de considérer toute vibration comme étant la combinaison de deux ondes circulaires, l'une droite, l'autre gauche, d'amplitude et de phase convenables. La séparation des composantes circulaires de l'onde guidée que l'on veut analyser peut se faire à l'aide d'un circuit hyperfréquence particulier appelé terminaison turnstile ; de tels circuits permettent de réaliser des analyseurs de haute précision pour des ondes centimétriques (8) ou millimétriques (10). Ces appareils offrent l'intérêt de ne comporter aucune pièce mobile dans le circuit hyperfréquence et de comparer à l'aide d'une méthode d'opposition les amplitudes et phases de chaque composante. En raison de son principe, cette technique de mesure donne des résultats très précis, mais demande un réglage préalable des atténuateurs et déphaseurs servant à obtenir l'opposition des deux ondes avant toute mesure : ceci est sans ennui lorsqu'on travaille à fréquence fixe, mais devient gênant et entraîne une perte de temps lorsqu'on effectue des mesures à fréquence variable comme nous le faisons.

B) Analyseur à sondes tournantes et détecteurs quadratiques -

Ce sont de tels dispositifs que nous employons. Nous allons les étudier en les classant d'après le nombre des sondes utilisées. Auparavant, il est bon de rappeler que ces analyseurs prélèvent, à l'aide d'une antenne équipant chaque sonde, de l'énergie à la périphérie du guide cylindrique où se propage l'onde à étudier. Si l'on fait tourner la sonde autour de l'axe du système, un dispositif détecteur quadratique couplé à l'antenne permet d'obtenir la répartition du champ électrique à la périphérie du guide. La position du maximum correspond à la direction de la polarisation, tandis que le rapport des amplitudes maximale et minimale du champ électrique permet de calculer l'ellipticité de la vibration.

1°) Analyseur à une seule sonde :

L'antenne portée par la sonde peut être couplée soit directement au cristal détecteur (6, 9), soit par l'intermédiaire d'une cavité





résonnante comme dans notre montage. Si l'on relie à un appareil de mesure le cristal détecteur pour en mesurer l'intensité du courant, la loi quadratique de détection fait que la sensibilité du montage est minimale au voisinage des axes, ce qui conduit à faire deux pointés à  $45^\circ$  du maximum pour obtenir la plus grande sensibilité et déterminer la position de l'onde avec la meilleure précision (7). Il en est de même pour les mesures des ellipticités très faibles et une méthode <sup>de</sup> deux pointés est également nécessaire (28).

Si l'on intercale dans la ligne hyperfréquence un dispositif, (que nous décrirons plus loin), permettant de faire varier légèrement autour de sa position d'origine la direction de polarisation de l'onde, il est possible de ne faire qu'un seul pointé. Supposons que l'on ait à analyser une vibration elliptique se propageant dans le guide cylindrique. Le cristal détecteur associé à l'antenne fournit un signal proportionnel au carré du champ électrique régnant au point de la périphérie du guide où est placée la sonde. Il est de la forme :

$$s = a \sin^2 \varphi + b \cos^2 \varphi = a + (b - a) \cos^2 \varphi.$$

Au voisinage de la position occupée par la sonde, la variation du signal est donnée par :  $ds = (a - b) \sin 2\varphi d\varphi = S \sin 2\varphi d\varphi$

Cette relation montre bien que si l'on veut obtenir la plus grande sensibilité lors de la mesure de ce signal, il faut se placer à  $45^\circ$  des axes de la vibration, ce qui oblige bien à faire deux pointés pour en déterminer la position. Nous avons donc imaginé une méthode éliminant cet ennui et rappelant la méthode utilisée maintenant de façon très courante pour tracer les spectres R.P.E. En effet, on peut établir une analogie entre ces deux types de mesures si l'on fait correspondre le signal fourni par la sonde à celui donné par le récepteur du spectrographe R.P.E., la rotation manuelle de l'analyseur à la variation lente du champ magnétique et une légère modulation du plan de polarisation de l'onde incidente à celle du champ magnétique. Dans notre montage cette modulation est obtenue par dichroïsme. Nous décomposons l'onde incidente en deux vibrations orthogonales dont on module très légèrement les amplitudes avec un déphasage de  $\pi$ .

Si l'on impose avec un dispositif comme le nôtre, (décrit Chap.VI) une variation périodique de la position de l'onde incidente, ce qui est analogue à un déplacement suivant la même loi de l'analyseur, on recueille un signal synchrone de celui causant le balayage spatial. Avec un balayage



sinusoidal de pulsation  $q$ , le signal détecté est de la forme :

$$s_q = S \sin 2\varphi \sin qt.$$

Après amplification sélective de ce signal, un système de détection synchrone permet d'obtenir enfin une différence de potentiel  $v$  actionnant un appareil de mesure ou d'enregistrement graphique ayant pour valeur :  $v = k s_q = kV \sin 2\varphi$ .

La sensibilité de ce dispositif est donnée par l'équation différentielle :  $dv = 2 kV \cos 2\varphi d\varphi$

Elle est maximale quand on place la sonde suivant l'un des axes de la vibration : la tension mesurée passe alors par la valeur nulle.

Le fait que la détermination de la position de cet axe se fasse par une mesure de zéro très précise, tandis que le montage présente sa sensibilité maximale, donne la possibilité d'effectuer des pointés d'axe très précis.

## 2°) Analyseur à deux antennes :

La méthode que nous venons de décrire demande des circuits hyperfréquences ou électroniques assez élaborés ; c'est pourquoi bien souvent la détermination de la position de l'onde est obtenue à l'aide d'un analyseur à pénombre. Le principe de cet analyseur consiste à utiliser deux sondes orthogonales identiques, placées dans un même plan de section droite du guide cylindrique ; on compare, par une méthode d'opposition, l'énergie qu'elles détectent. L'égalité est obtenue lorsque l'axe de la vibration est confondu avec la bissectrice de l'angle des deux sondes.

Il existe plusieurs types d'analyseurs à pénombre, et on peut les classer en deux catégories :

### a) analyseur à détecteurs séparés :

Chaque antenne est couplée à un cristal détecteur par l'intermédiaire d'une ligne résonnante, et une méthode de zéro est employée pour comparer les deux signaux détectés (32). La sensibilité et la simplicité du montage sont cependant fortement amoindries par la nécessité d'une symétrie aussi parfaite que possible du montage. Or il est très difficile de réaliser deux lignes identiques et de disposer de deux cristaux détecteurs semblables.

C'est pourquoi, l'on a cherché à réaliser un montage à une seule cavité résonnante et à cristal détecteur unique.





## b) analyseur à cavité coaxiale et cristal détecteur unique :

L'étude et la réalisation de cet analyseur (7) ont demandé un important travail relatif aux modes d'ordre supérieur existant dans les cavités coaxiales (33), sur lequel nous ne pouvons pas nous étendre. L'analyseur comprend donc une cavité coaxiale de grand diamètre, dont le conducteur central est constitué par le guide cylindrique où se propage l'onde à étudier. Un unique cristal détecteur lui est associé, tandis que les sondes orthogonales sont constituées chacune par une antenne vibrant en demi-onde. Ces antennes sont logées dans l'espace annulaire formant la cavité suivant deux rayons et pénétrant légèrement dans le guide ; le réglage de leur enfoncement permet de réaliser l'équilibrage du système.

Il faut remarquer que tous les montages à deux antennes peuvent être employés non seulement comme analyseurs à pénombre, mais aussi comme dispositifs à une seule sonde. Dans ce cas, il suffit ou bien de n'utiliser qu'un des cristaux détecteurs ou, pour le montage à cavité coaxiale, de retirer l'antenne inutilisée. C'est pourquoi nous avons jugé préférable de réaliser des dispositifs à deux antennes, ce qui permet de choisir le mode de fonctionnement le meilleur et le mieux adapté à chaque type de mesure.

## c) analyseur à détection linéaire :

Nous avons réalisé un analyseur non classique à détection linéaire, que nous décrirons en détail au chapitre VI, et nous nous contenterons maintenant d'en examiner les particularités de fonctionnement. Le signal obtenu étant une fonction linéaire de l'angle de l'analyseur avec le grand axe de la vibration, la sensibilité est maximale lorsqu'on se trouve au voisinage d'un des deux axes. Un seul pointé permet donc de déterminer avec précision la position de la vibration. On détermine également l'ellipticité avec une meilleure précision, puisqu'on mesure directement l'amplitude minimale et l'amplitude maximale de la vibration.

----- :--

-:-



## CHAPITRE. II

=====

### ETUDE PAR REFLEXION OBLIQUE D'ECHANTILLONS ABSORBANTS ANISOTROPES

Cette méthode d'étude que nous avons esquissée précédemment s'apparente à celle de l'optique lumineuse classique. Les premières recherches réflectométriques ont été effectuées par Kerr en 1876 et portaient sur la réflexion de la lumière par un miroir ferro-magnétique. Ces travaux ont été poursuivis par plusieurs chercheurs qui ont mis au point différents montages expérimentaux (34 - 35) et par Vögt qui en a fait une étude théorique (36).

L'appareillage que nous avons réalisé en ondes centimétriques guidées (bande X) permet l'étude de la réflexion de ces ondes sur la surface d'un échantillon présentant une trop grande absorption pour en permettre l'étude par transmission. Comme nous l'avons indiqué, le montage mécanique autorise l'application d'un champ équatorial magnétique ou électrique et on peut ainsi examiner toute une série d'échantillons :

a) substances très absorbantes, telles les métaux et les liquides dipolaires, dont la permittivité et la perméabilité relatives sont de simples constantes.

b) substances uniaxes absorbantes, dont l'anisotropie peut être induite par un champ magnétique ou électrique extérieur. On peut considérer que ceci se traduit mathématiquement en écrivant la permittivité de l'échantillon sous la forme d'une matrice diagonale :

$$\begin{vmatrix} \epsilon' & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{vmatrix}$$

c) substances gyromagnétiques absorbantes dont l'anisotropie créée par un champ magnétique convenable est due à la modification de la





perméabilité magnétique qui se présente sous la forme (6) :

$$\begin{vmatrix} \mu' & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -jk \\ 0 & jk & \mu \end{vmatrix}$$

Les résultats expérimentaux obtenus demandent pour être interprétés le calcul théorique des coefficients de réflexion. Leur détermination exige évidemment l'étude de la propagation de l'onde considérée dans l'échantillon. Il semblerait donc qu'à chaque cas devrait correspondre un calcul particulier. Mais la symétrie existant dans l'écriture des équations de Maxwell permet de transposer les calculs faits pour une expression matricielle de  $\epsilon$  en  $\mu$ , et vice versa (3). C'est dans le cas d'une substance gyromagnétique que l'on rencontre la forme la plus compliquée de la perméabilité magnétique ; il est possible de lui faire correspondre une écriture matricielle de même allure pour la permittivité ; celle-ci correspondrait à un milieu gyro-électrique doué de propriétés voisines de celles des corps gyromagnétiques et existe pour des plasmas soumis à un champ magnétique (37). L'étude théorique des phénomènes existant dans un tel milieu est utile, car on peut déduire des résultats généraux ceux relatifs aux cas qui nous intéressent. En posant  $\epsilon' = \epsilon$  et  $k = 0$ , on est ramené au cas d'un corps isotrope ; si l'on annule simplement  $k$ , on étudie alors un milieu uniaxe tandis qu'une transposition de  $\epsilon$  en  $\mu$  permet d'obtenir les résultats donnés par un échantillon gyromagnétique.

C'est donc dans l'hypothèse d'un corps présentant une permittivité de la forme :

$$\begin{vmatrix} \epsilon' & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & -jk \\ 0 & jk & \epsilon \end{vmatrix}$$

que nous ferons cette étude, permettant d'en déduire les résultats particuliers correspondant à chaque cas réel.

## I - CONDITIONS EXPERIMENTALES

Le dispositif de mesure comprend un premier guide incident de section carrée, un second captant l'onde réfléchié et comme surface réfléchissante une lame épaisse formée par l'échantillon anisotrope.

Les guides employés sont d'une section telle que seuls puissent s'y propager les modes fondamentaux  $TE_{01}$  et  $TE_{10}$ .



Ils sont disposés de façon à ce que leurs arêtes soient parallèles au plan d'incidence  $yOz$  ou à  $Ox$ , l'intersection de leurs axes se faisant au point  $O$  (se reporter chap. I - fig. I - 3).

La lame réfléchissante soumise à l'examen est choisie de dimensions transversales et d'épaisseur suffisantes pour que les réflexions sur la face postérieure et les effets de bord soient négligeables et que l'on se trouve pratiquement dans le cas où les ondes réfractées se propagent en espace illimité. Pour obtenir ce résultat, il suffit de donner à la lame une épaisseur et des dimensions transversales telles que tout point de la surface de réflexion soit éloigné de l'extérieur d'une distance minimale  $\lambda$  telle que :  $A.\lambda = 2$ ,  $A$  étant la constante d'atténuation linéaire du corps étudié. Cette condition est facilement remplie pour les matériaux que nous avons examinés et les lames présentent alors une épaisseur comprise entre 5 et 10 mm ; les ondes réfléchies parasites subissent ainsi une atténuation d'au moins 40 dB et les résultats sont à 1% près identiques à ceux que donnerait théoriquement une réflexion pure sur le dioptré plan d'entrée de la lame.

## II - PROPAGATION DE L'ONDE REFRACTEE

Comme en optique classique, conformément aux lois de Descartes, la normale à l'onde réfractée est dans le plan d'incidence en raison de la symétrie du système par rapport à ce plan. Il correspond au plan  $yOz$  du repère cartésien que nous avons choisi, tandis que le plan de réflexion est  $xOy$  et  $Ox$  l'axe de l'anisotropie ; l'échantillon étant situé du côté des côtes positives selon  $Oz$ .

La direction de l'onde réfractée peut être repérée par les composantes de son vecteur unitaire  $\vec{W}$  ( $O$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ ). Les champs incidents et réfractés doivent être synchrones en tous points de la surface de séparation  $xOy$ , ce qui nous conduit à écrire une relation conforme à la seconde loi de Descartes entre les directions incidente et réfractée :

$$\frac{\sin i}{v_1} = \frac{B}{v}$$

$v_1$  étant la vitesse de propagation de l'onde incidente et  $v$  celle de l'onde réfractée. Cette relation peut encore, en faisant apparaître la constante de propagation  $\gamma$  de l'onde guidée incidente et l'indice absolu  $n$  de la lame, s'écrire sous la forme :

$$\frac{\gamma \sin i}{\omega} = \frac{B}{v} = \frac{nB}{c}$$





Le champ électromagnétique de l'onde réfractée est régi par les équations de Maxwell qui, pour l'échantillon considéré, s'écrivent :

$$\text{rot } \vec{E} = - \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \text{rot } \vec{H} = |\epsilon| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{d'où : } \text{rot rot } \vec{E} = - \mu \frac{\partial \text{rot } \vec{H}}{\partial t}$$

En supposant les champs sinusoïdaux et de pulsation  $\omega$ , et si  $\vec{E}$  est de la forme  $\vec{E}_0 \cdot e^{j\omega(t - \frac{n}{c} \vec{W} \cdot \vec{r})}$

on peut écrire :

$$\text{rot rot } \vec{E} = \mu \omega^2 |\epsilon| \vec{E} = - n^2 \frac{\omega^2}{c^2} \vec{W}_\Lambda (\vec{W}_\Lambda \cdot \vec{E}).$$

Le double produit vectoriel peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\Gamma^2 & B\Gamma \\ 0 & B\Gamma & -B^2 \end{vmatrix} \vec{E}$$

En remplaçant  $|\epsilon|$  par son expression matricielle, l'équation de propagation devient :

$$- n^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\Gamma^2 & B\Gamma \\ 0 & B\Gamma & -B^2 \end{vmatrix} \vec{E} = \begin{vmatrix} \epsilon' & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & -jk \\ 0 & jk & \epsilon \end{vmatrix} C^2 \mu \vec{E}$$

Pour la résoudre, nous effectuons un changement de coordonnées tel que les nouveaux vecteurs unitaires soient :

$$\vec{e}_1 \quad \left( -\frac{j}{\sqrt{2}}, -\frac{\Gamma}{\sqrt{2}}, \frac{B}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\vec{e}_2 \quad \left( \frac{j}{\sqrt{2}}, -\frac{\Gamma}{\sqrt{2}}, \frac{B}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\vec{W} \quad (0, B, \Gamma)$$

Ce changement de base n'est pas nécessaire pour le calcul de  $n$  puisque le déterminant d'une matrice est indépendant de la base utilisée, mais il est indispensable pour effectuer ensuite le calcul des composantes. C'est pourquoi nous le faisons dès maintenant.



L'équation devient :

$$\begin{vmatrix} n^2 & 0 & 0 \\ 0 & n^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\epsilon + \epsilon'}{2} c^2_{\mu} & \frac{\epsilon - \epsilon'}{2} c^2_{\mu} & j \frac{k}{\sqrt{2}} c^2_{\mu} \\ \frac{\epsilon - \epsilon'}{2} c^2_{\mu} & \frac{\epsilon + \epsilon'}{2} c^2_{\mu} & j \frac{k}{\sqrt{2}} c^2_{\mu} \\ -j \frac{k}{2} c^2_{\mu} & -j \frac{k}{2} c^2_{\mu} & \epsilon c^2_{\mu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{vmatrix}$$

où  $\xi, \eta, \zeta$  sont les composantes du champ transmis dans le système  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{W})$ .

$\xi, \eta, \zeta$  sont les solutions du système homogène :

$$(I) \begin{cases} \left( \frac{\epsilon + \epsilon'}{2} c^2_{\mu} - n^2 \right) \xi + \frac{\epsilon - \epsilon'}{2} c^2_{\mu} \eta + j \frac{k}{\sqrt{2}} c^2_{\mu} \zeta = 0 \\ \frac{\epsilon - \epsilon'}{2} c^2_{\mu} \xi + \left( \frac{\epsilon + \epsilon'}{2} c^2_{\mu} - n^2 \right) \eta + j \frac{k}{\sqrt{2}} c^2_{\mu} \zeta = 0 \\ -j \frac{k}{\sqrt{2}} c^2_{\mu} \xi - j \frac{k}{\sqrt{2}} c^2_{\mu} \eta + \epsilon c^2_{\mu} \zeta = 0 \end{cases}$$

Cette 3ème équation peut se simplifier en la divisant par  $\epsilon c^2_{\mu}$ . Elle devient :

$$-j \frac{k}{\epsilon \sqrt{2}} \xi - j \frac{k}{\epsilon \sqrt{2}} \eta + \zeta = 0$$

Ce système n'a de solution non nulle que si son déterminant est nul.

Celui-ci a pour expression :

$$\begin{vmatrix} \frac{\epsilon + \epsilon'}{2} c^2_{\mu} - n^2 & \frac{\epsilon - \epsilon'}{2} c^2_{\mu} & j \frac{k}{\sqrt{2}} c^2_{\mu} \\ \frac{\epsilon - \epsilon'}{2} c^2_{\mu} & \frac{\epsilon + \epsilon'}{2} c^2_{\mu} - n^2 & j \frac{k}{\sqrt{2}} c^2_{\mu} \\ -j \frac{k}{\epsilon \sqrt{2}} & -j \frac{k}{\epsilon \sqrt{2}} & 1 \end{vmatrix}$$





qui peut s'écrire (en retranchant la 2ème ligne de la 1ère)

$$\begin{vmatrix} \epsilon' c^2_{\mu} - n^2 & -\epsilon' c^2_{\mu} + n^2 & 0 \\ \frac{\epsilon - \epsilon'}{2} c^2_{\mu} & \frac{\epsilon + \epsilon'}{2} c^2_{\mu} - n^2 & j \frac{k}{\sqrt{2}} c^2_{\mu} \\ -j \frac{k}{\epsilon \sqrt{2}} & -j \frac{k}{\epsilon \sqrt{2}} & 1 \end{vmatrix}$$

ou encore (en ajoutant les deux premières colonnes et en remplaçant la 2ème colonne par cette somme) :

$$\begin{vmatrix} \epsilon' c^2_{\mu} - n^2 & 0 & 0 \\ \frac{\epsilon - \epsilon'}{2} c^2_{\mu} & \epsilon c^2_{\mu} - n^2 & j \frac{k}{\sqrt{2}} c^2_{\mu} \\ -j \frac{k}{\epsilon \sqrt{2}} & -j \frac{k \sqrt{2}}{\epsilon} & 1 \end{vmatrix}$$

Ecrivons que ce déterminant est nul.

$$(\epsilon' c^2_{\mu} - n^2) (\epsilon c^2_{\mu} - n^2 - \frac{k^2}{\epsilon} c^2_{\mu}) = 0$$

Ce qui peut s'écrire :

$$(n^2 - \epsilon' c^2_{\mu}) (n^2 - (\epsilon c^2_{\mu} - \frac{k^2}{\epsilon} c^2_{\mu})) = 0$$

ou encore :

$$(n^2 - \epsilon' c^2_{\mu}) (n^2 - c^2_{\mu} (\epsilon - \frac{k^2}{\epsilon})) = 0$$

ce qui donne pour l'indice deux valeurs distinctes.

$$n' = \sqrt{\epsilon' c^2_{\mu}} \quad \text{et} \quad n = \sqrt{\mu c^2 (\epsilon - \frac{k^2}{\epsilon})}$$

correspondant à deux ondes différentes O' et O se propageant à l'intérieur du milieu illimité sur lequel s'effectue la réflexion.

Calculons les composantes du champ électrique de chacune de ces ondes.

a) onde O' se propageant avec la vitesse  $\frac{c}{n'}$ .

Remplaçons dans les trois équations I,  $n^2$  par  $\epsilon' c^2_{\mu}$ .

Le déterminant étant nul, le système se réduit aux deux équations :

$$\frac{(\epsilon - \epsilon') c^2_{\mu}}{2} \xi + \frac{(\epsilon - \epsilon') c^2_{\mu}}{2} \eta + j \frac{k}{\sqrt{2}} c^2_{\mu} \zeta = 0$$



$$-j \frac{k c_{\mu}^2}{\sqrt{2}} \xi - j \frac{k c_{\mu}^2}{\sqrt{2}} \eta + \epsilon c_{\mu}^2 \zeta = 0$$

dont le déterminant a pour expression =

$$\frac{(\epsilon - \epsilon') c_{\mu}^2}{2} - \frac{k^2 c_{\mu}^2}{2\epsilon}$$

$$\text{ou } \frac{c_{\mu}^2}{2} \left( (\epsilon - \epsilon') - \frac{k^2}{\epsilon} \right)$$

Celle-ci ne pouvant être nulle, en raison des valeurs numériques, le système a donc pour solution :

$$\begin{cases} \xi + \eta = 0 \\ \zeta = 0 \end{cases}$$

et les composantes du champ sont :  $(\xi', -\xi', 0)$ .

b) onde 0 se propageant avec la vitesse  $\frac{c}{n}$ .

Réplaçons dans ce cas, dans les équations I,  $n^2$  par  $(\mu c^2 \epsilon - \mu c^2 \frac{k^2}{\epsilon}) \frac{1}{2}$ .

Comme précédemment on obtient un système à deux équations :

$$\left( \frac{\epsilon' - \epsilon}{2} c_{\mu}^2 + \frac{k^2}{\epsilon} c_{\mu}^2 \right) \xi + \frac{\epsilon - \epsilon'}{2} c_{\mu}^2 \eta + j \frac{k}{\sqrt{2}} c_{\mu}^2 \zeta = 0$$

$$\frac{k}{\epsilon} \xi + \frac{k}{\epsilon} \eta + j \sqrt{2} \zeta = 0$$

Cette équation peut s'écrire :

$$\frac{k}{\epsilon} (\xi + \eta) = -j \sqrt{2} \zeta.$$

Ce système de deux équations étant à 3 inconnus, fixons arbitrairement l'une d'elles, en posant :

$$\zeta = 0 \frac{k}{\epsilon}$$

Le système devient :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\epsilon' - \epsilon}{2} c_{\mu}^2 + \frac{k^2}{\epsilon} c_{\mu}^2 \right) \xi + \frac{\epsilon - \epsilon'}{2} c_{\mu}^2 \eta &= -j 0 \frac{k^2 c_{\mu}^2}{\epsilon \sqrt{2}} \\ \xi + \eta &= -j 0 \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Après multiplication de la 2ème par  $-\frac{\epsilon - \epsilon'}{2} c_{\mu}^2$  et addition on obtient :

$$\left( (\epsilon' - \epsilon) c_{\mu}^2 + \frac{k^2}{\epsilon} c_{\mu}^2 \right) \xi = -\frac{j 0}{\sqrt{2}} \left( \frac{k^2 c_{\mu}^2}{\epsilon} + (\epsilon' - \epsilon) c_{\mu}^2 \right)$$





et enfin :

$$\xi = - \frac{jQ}{\sqrt{2}}$$

$$\eta = - \frac{jQ}{\sqrt{2}}$$

$$\zeta = Q \frac{k}{\epsilon}$$

En revenant aux coordonnées primitives, on obtient pour composantes XYZ des champs électriques les valeurs :

$$X = - \frac{j}{\sqrt{2}} (\xi - \eta)$$

$$Y = - \frac{\Gamma}{\sqrt{2}} (\xi + \eta) + B\zeta$$

$$Z = \frac{B}{\sqrt{2}} (\xi + \eta) + \Gamma\zeta$$

soit, pour l'onde 0' : (X', 0, 0)

et pour l'onde 0 : (0, Y, Z)

avec :

$$\left| \begin{array}{l} Y = Q (j\Gamma + \frac{k}{\epsilon} B) = Q \cdot R \\ Z = Q (-jB + \frac{k}{\epsilon} \Gamma) = Q \cdot S \end{array} \right.$$

en posant  $R = j\Gamma + \frac{k}{\epsilon} B$

et  $S = -jB + \frac{k}{\epsilon} \Gamma$

Les champs électriques étant ainsi déterminés, nous pouvons obtenir à l'aide de la 1ère équation de Maxwell les composantes de  $\vec{H}$  dans l'échantillon :

$$\text{rot } \vec{E} = - \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = - j\omega\mu \vec{H}$$

$$\text{ou } - j\omega \frac{n}{c} (\vec{W}_\Lambda \vec{E}) = - j\omega\mu \vec{H}$$

$$\text{d'où } \vec{H} = \frac{n}{\mu c} (\vec{W}_\Lambda \vec{E})$$

ce qui donne pour chaque onde :

$$\text{onde 0' } \left\{ \begin{array}{l} H'_x = \frac{n'}{\mu c} (\vec{W}'_\Lambda \vec{E})_x = \frac{n'}{\mu c} (B'Z' - \Gamma'Y') = 0 \\ H'_y = \frac{n'}{\mu c} (\vec{W}'_\Lambda \vec{E})_y = \frac{n'}{\mu c} \Gamma' X' \\ H'_z = \frac{n'}{\mu c} (\vec{W}'_\Lambda \vec{E})_z = - \frac{n'}{\mu c} B' X' \end{array} \right.$$



$$\text{onde 0} - \begin{cases} H_x = \frac{n}{\mu c} (\vec{W} \wedge \vec{E})_x = \frac{n}{\mu c} (BZ - rY) = 0 \frac{n}{\mu c} (B^2 + r^2) = 0 \frac{n}{\mu c} \\ H_y = \frac{n}{\mu c} (\vec{W} \wedge \vec{E})_y = \frac{n}{\mu c} rX = 0 \\ H_z = \frac{n}{\mu c} (\vec{W} \wedge \vec{E})_z = - \frac{n}{\mu c} BX = 0 \end{cases}$$

### III - RACCORDEMENT DES COMPOSANTES SUR LA SURFACE DE REFLEXION EXPRESSION DES COEFFICIENTS DE REFLEXION

C'est sur la surface de la lame que se raccordent les champs de l'onde réfractée que nous venons d'étudier et ceux des ondes incidente et réfléchie décomposées chacune en une onde p de polarisation parallèle au plan d'incidence, correspondant au mode  $TE_{10}$ , et une onde s polarisée perpendiculairement, correspondant au mode  $TE_{01}$ .

Cette décomposition permet une représentation matricielle du coefficient de réflexion dont chaque élément assure la liaison entre les ondes réfléchies p et s et leurs homologues incidentes.

$$(E_r)_{ps} = \begin{vmatrix} r_{pp} & r_{ps} \\ r_{sp} & r_{ss} \end{vmatrix} (E_i)_{ps}$$

Le calcul de ces coefficients s'effectue en écrivant que sur la surface de séparation les composantes tangentielles de  $\vec{E}$  et de  $\vec{H}$  sont continues.

Pour cela, il faut les exprimer dans le système des coordonnées  $(Ox, Oy, Oz)$  lié au miroir.

Or, à une certaine distance de celui-ci, les composantes des ondes incidente et réfléchie sont représentées de façon simple en fonction des coordonnées correspondant à chaque guide.

Nous repèrons donc l'onde incidente dans le système  $(Ox_i, Oy_i, Oz_i)$  et l'onde réfléchie dans le système  $(Ox_r, Oy_r, Oz_r)$  (fig. II - 1), l'origine des coordonnées 0 étant le point d'intersection des deux axes de symétrie des guides  $Oz_i$  et  $Oz_r$ , afin de respecter la position relative





des guides et du miroir.

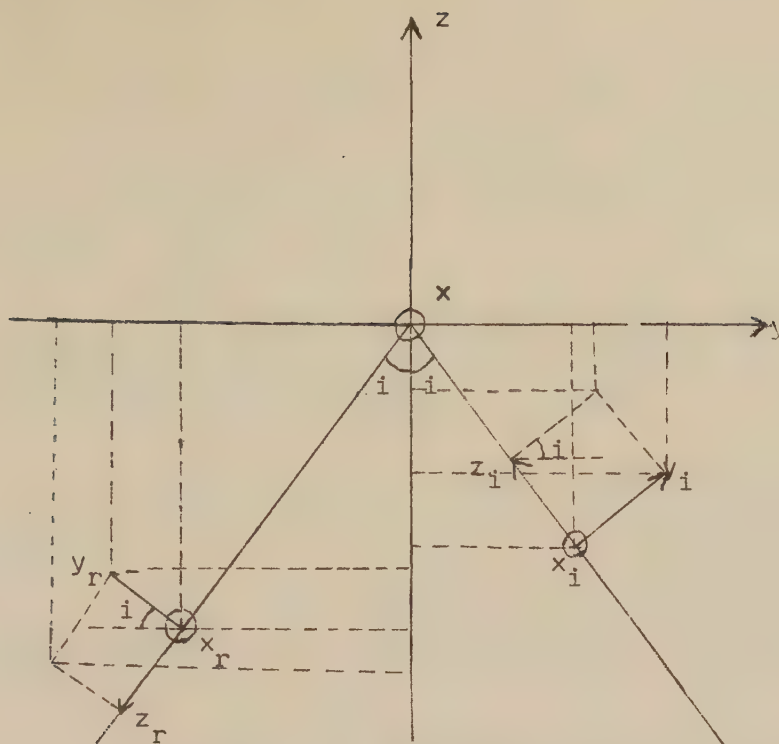


fig. II - i

Ce qui donne comme valeurs des composantes des champs :

a) onde incidente  $E_i$  :

$$\begin{cases} E_{xi} = E_s \cos \beta y_i \cdot P_i \\ E_{yi} = -E_p \cos \alpha x_i \cdot P_i \\ E_{zi} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_{xi} = \frac{-Y}{KZ_0} E_p \cos \alpha x_i \cdot P_i \\ H_{yi} = \frac{Y}{KZ_0} E_s \cos \beta y_i \cdot P_i \\ H_{zi} = \frac{j\alpha}{KZ_0} E_p \sin \alpha x_i \cdot P_i \\ \quad + \frac{j\beta}{KZ_0} E_s \sin \beta y_i \cdot P_i \end{cases}$$

b) onde réfléchie  $E_r$  :

$$\begin{cases} E_{xr} = E'_s \cos \beta y_r \cdot P_r \\ E_{yr} = -E'_p \cos \alpha x_r \cdot P_r \\ E_{zr} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_{xr} = \frac{-Y}{KZ_0} E'_p \cos \alpha x_r \cdot P_r \\ H_{yr} = \frac{Y}{KZ_0} E'_s \cos \beta y_r \cdot P_r \\ H_{zr} = \frac{j\alpha}{KZ_0} E'_p \sin \alpha x_r \cdot P_r \\ \quad + \frac{j\beta}{KZ_0} E'_s \sin \beta y_r \cdot P_r \end{cases}$$

Dans ces relations  $P_i$  et  $P_r$  représentent le terme de propagation de la forme  $e^{j(\omega t - \gamma z)}$  ;

$K$  étant le vecteur d'onde,

$Z_0$  l'impédance d'onde,

et  $\gamma$  la constante de propagation.



Et l'on a,  $\alpha = \frac{\pi}{a}$  et  $\beta = \frac{\pi}{b}$

a et b étant les dimensions transversales des guides.

Ces notations sont générales ; mais dans le cas de notre étude où les guides sont identiques et de section carrée ( $a = b$ ),  $P_i$  et  $P_r$  ont même valeur et  $\alpha = \beta$ .

Dans un souci de plus grande clarté, nous estimons utile d'indiquer les résultats obtenus en effectuant les changements de coordonnées que nous avons précédemment signalés.

Le passage du système de coordonnées liées au guide incident au système (Ox, Oy, Oz) s'effectue par une rotation d'angle  $i$  autour de Ox.

Quant à celui relatif au guide récepteur, il est obtenu de façon analogue par une rotation d'angle  $i + \pi$ . On obtient :

a) composantes de l'onde incidente -

$$\begin{cases} E_x = E_{xi} \\ E_y = E_{yi} \cos i + E_{zi} \sin i \\ E_z = -E_{yi} \sin i + E_{zi} \cos i \end{cases} \quad \begin{cases} H_x = H_{xi} \\ H_y = H_{yi} \cos i + H_{zi} \sin i \\ H_z = -H_{yi} \sin i + H_{zi} \cos i \end{cases}$$

b) composantes de l'onde réfléchie -

$$\begin{cases} E'_x = E_{xr} \\ E'_y = -E_{yr} \cos i + E_{zr} \sin i \\ E'_z = -E_{yr} \sin i - E_{zr} \cos i \end{cases} \quad \begin{cases} H'_x = H_{xr} \\ H'_y = -H_{yr} \cos i + H_{zr} \sin i \\ H'_z = -H_{yr} \sin i - H_{zr} \cos i \end{cases}$$

et comme relations entre les coordonnées pour  $z = 0$

$$\begin{aligned} x_i &= x & x_r &= x \\ y_i &= y \cos i & y_r &= -y \cos i \\ z_i &= -y \sin i & z_r &= y \sin i. \end{aligned}$$

Avec les conventions de l'optique classique et en utilisant les expressions des composantes des champs électrique et magnétique des ondes O et O' calculées au § II, les équations de continuité des champs

./...



tangentiels s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda' = E_x + E'_x \quad (1) \\ QR = E_y + E'_y \quad (2) \\ \frac{n' \Gamma' X'}{\mu c} = H_y + H'_y \quad (3) \\ \frac{Qn}{\mu c} = H_x + H'_x \quad (4) \end{array} \right.$$

On en tire :

$$H_x + H'_x = \frac{n}{R\mu c} (E_y + E'_y) \quad (5)$$

$$H_y + H'_y = \frac{n' \Gamma'}{\mu c} (E_x + E'_x) \quad (6)$$

De l'expression (5) on déduit :

$$E'_p = E_p \frac{P_1}{P_r} \left( \frac{\frac{n}{R\mu c} \cos i - \frac{\gamma}{KZ_0}}{\frac{n}{R\mu c} \cos i + \frac{\gamma}{KZ_0}} \right)$$

Or  $\frac{P_1}{P_r} = 1$ , puisque nous nous plaçons à l'origine des coordonnées, et

$$E'_p = R_{ps} E_s + R_{pp} E_p$$

Donc  $R_{ps} = 0$  et

$$R_{pp} = \frac{\frac{n}{R\mu c} \cos i - \frac{\gamma}{KZ_0}}{\frac{n}{R\mu c} \cos i + \frac{\gamma}{KZ_0}}$$

expression dans laquelle figure le nombre complexe  $R = j\Gamma + \frac{k}{\epsilon} B$  qui dépend du paramètre  $k$  dû au phénomène gyromagnétique.

A partir de l'expression (6), un calcul analogue permet d'obtenir, en posant  $u = \beta y \cos i$  :

$$(R_{sp}) = \frac{\frac{j\alpha}{KZ_0} \sin(\alpha x) \sin i \frac{\frac{2n}{R\mu c} \cos i}{\frac{n}{R\mu c} \cos i + \frac{\gamma}{KZ_0}}}{\frac{n' \Gamma'}{\mu c} \cos u + \frac{\gamma}{KZ_0} \cos u \cos i - \frac{j\beta}{KZ_0} \sin u \sin i}$$





$$(R_{ss}) = \frac{-\frac{n'\Gamma'}{\mu c} \cos u + \frac{\gamma}{KZ_0} \cos u \cos i - \frac{j\beta}{KZ_0} \sin u \sin i}{\frac{n'\Gamma'}{\mu c} \cos u + \frac{\gamma}{KZ_0} \cos u \cos i - \frac{j\beta}{KZ_0} \sin u \sin i}$$

On constate que ces deux coefficients dépendent des coordonnées  $x, y$  du point considéré du miroir. Ce point joue donc le rôle d'une source ponctuelle qui excite une onde d'amplitude  $(E'_s)_{xy}$  présentant loin du miroir une structure de type  $TE_{01}$  ou  $TE_{10}$ .

L'onde réfléchie totale que l'on observe résulte de la composition des ondes réfléchies par tous les points du miroir, conformément à la règle de superposition.

Pour la calculer, nous étendrons au cas d'un nombre illimité de sources la méthode utilisée pour résoudre le problème de l'excitation d'une ligne de transmission par une distribution arbitraire de sources en nombre fini (38).

Si nous appelons  $S_m$  la surface de réflexion, l'amplitude totale  $(E'_s)$  est donc liée à l'amplitude  $(E'_s)_{xy}$  de chaque onde élémentaire par la relation :

$$E'_s = \frac{1}{S_m} \int_{S_m} (E'_s)_{xy} \cdot dx \, dy$$

$$\text{d'où } R_{sp} = \frac{1}{S_m} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2 \cos i}}^{+\frac{b}{2 \cos i}} (R_{sp}) \, dx \, dy$$

$$\text{et } R_{ss} = \frac{1}{S_m} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2 \cos i}}^{+\frac{b}{2 \cos i}} (R_{ss}) \, dx \, dy \quad \text{avec } S_m = \frac{ab}{\cos i}.$$

Le calcul de ces coefficients, que nous donnons en annexe, donne finalement :

$$R_{sp} = 0$$

$$R_{ss} = \frac{\frac{\beta \sin i + \gamma \cos i}{KZ_0} - \frac{n'\Gamma'}{\mu c}}{\frac{\beta \sin i + \gamma \cos i}{KZ_0} + \frac{n'\Gamma'}{\mu c}}$$



#### IV - EXPRESSION PRATIQUE DES COEFFICIENTS POUR UNE INCIDENCE DE $\frac{\pi}{4}$

Les expressions générales des coefficients de réflexion se simplifient dans le cas pratique où l'on utilise des guides vides de section carrée et sous une incidence de  $\frac{\pi}{4}$ .

Les quatre coefficients deviennent dans ces conditions :

$$R_{ps} = R_{sp} = 0$$

$$R_{pp} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\frac{n}{R\mu c} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\gamma}{\omega\mu_0}}{\frac{n}{R\mu c} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\gamma}{\omega\mu_0}} \quad \text{avec } R = j \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left( \frac{c\gamma}{\omega n} \right)^2 + \frac{kc\gamma \sqrt{2}}{2\epsilon \omega n}}$$

$$R_{ss} = \frac{\frac{\sqrt{2}(a\gamma + \pi)}{2a \omega\mu_0} - \frac{n'\Gamma'}{\mu c}}{\frac{\sqrt{2}(a\gamma + \pi)}{2a \omega\mu_0} + \frac{n'\Gamma'}{\mu c}} \quad \text{avec } \Gamma' = \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left( \frac{c\gamma}{\omega n'} \right)^2}$$

#### V - CONCLUSION

Les expressions des coefficients de réflexion sont simples et ressemblent à celles obtenues en propagation en espace illimité (39), mais celle du coefficient  $R_{pp}$  est un nombre complexe, alors que les trois autres sont des nombres réels. Ceci permet de prévoir que, même dans le cas d'un miroir isotrope, non gyromagnétique, une onde incidente rectiligne quelconque donne naissance à une vibration réfléchie elliptique. Ce n'est que dans le cas où la vibration incidente a une polarisation de type s ou p que l'on obtient en sortie une onde rectiligne de même type. Les résultats expérimentaux que nous avons obtenus le confirment, et nous avons également constaté une analogie complète entre les phénomènes observés dans le cas de guides à section carrée, dont nous venons d'établir la théorie, et le cas de guides cylindriques plus commodes à utiliser expérimentalement.

Les expressions théoriques montrent que les coefficients de réflexion dépendent de la constante de propagation  $\gamma$ , c'est-à-dire de la pulsation  $\omega$  de l'onde, ce que confirment les courbes obtenues avec un miroir en cuivre rouge (voir chap. VIII) où l'on observe de grandes





variations des rotations et ellipticités obtenues lorsque l'on fait varier la fréquence du générateur.

Une telle propriété du dispositif réflecteur peut donc être utilisée pour obtenir une onde d'ellipticité désirée.

-----



# ANNEXE MATHÉMATIQUE (Chapitre II)

=====

Au § III, le remplacement dans les équations (5) et (6) de chaque terme par son expression en fonction des coordonnées  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  conduit successivement aux expressions de

$$R_{ps} \text{ et } R_{pp}, \quad |R_{sp}| \quad \text{et} \quad |R_{ss}|.$$

Nous donnons ci-après les calculs qui permettent d'obtenir les expressions finales de  $R_{sp}$  et  $R_{ss}$ .

## I - CALCUL DE $R_{sp}$

$$\text{L'expression } R_{sp} = \frac{1}{S_m} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2 \cos i}}^{+\frac{b}{2 \cos i}} (R_{sp}) \, dx \, dy$$

peut s'écrire :

$$R_{sp} = \frac{1}{S_m} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \sin \alpha x \, dx \int_{-\frac{b}{2 \cos i}}^{+\frac{b}{2 \cos i}} F(y) \, dy$$

ou en résolvant la première intégrale :

$$R_{sp} = \left( -\frac{1}{\alpha S_m} \int_{-\frac{b}{2 \cos i}}^{+\frac{b}{2 \cos i}} F(y) \, dy \right) \cos \alpha x \Bigg|_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}$$

d'où  $R_{sp} = 0$ .

## II - CALCUL DE $R_{ss}$

Nous avons :

$$R_{ss} = \frac{1}{S_m} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2 \cos i}}^{+\frac{b}{2 \cos i}} (R_{ss}) \, dx \, dy$$

./...

1. The first part of the paper is devoted to the study of the

2. The second part of the paper is devoted to the study of the

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 1$$

3. The third part of the paper is devoted to the study of the

4. The fourth part of the paper is devoted to the study of the

5.

6. The fifth part of the paper is devoted to the study of the

7. The sixth part of the paper is devoted to the study of the

8. The seventh part of the paper is devoted to the study of the

9. The eighth part of the paper is devoted to the study of the

10.

11. The ninth part of the paper is devoted to the study of the

12.

13.

14. The tenth part of the paper is devoted to the study of the

15.

16. The eleventh part of the paper is devoted to the study of the

17. The twelfth part of the paper is devoted to the study of the

18.

19. The thirteenth part of the paper is devoted to the study of the

20.

21.

Cette expression peut s'écrire :

$$R_{ss} = \frac{1}{S_m} \int \int \frac{\left\{ -\left(\frac{n'\Gamma'}{\mu c}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{KZ_0} \cos i\right)^2 \right\} \cos^2 u + \left(\frac{\beta}{KZ_0} \sin i\right)^2 \sin^2 u - \frac{2j\beta}{KZ_0} \frac{n'\Gamma'}{\mu c} \sin i \sin u \cos u}{\left(\frac{n'\Gamma'}{\mu c} \cos u + \frac{\gamma}{KZ_0} \cos u \cos i\right)^2 + \left(\frac{\beta}{KZ_0} \sin u \sin i\right)^2}$$

• dx dy.

Elle devient, en conservant u comme variable, et en posant :

$$A = \frac{\beta}{KZ_0} \sin i$$

$$B = \frac{n'\Gamma'}{\mu c}$$

$$C = \frac{\gamma}{KZ_0} \cos i$$

$$R_{ss} = \frac{a}{S_m \beta \cos i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{A^2 \sin^2 u + (C^2 - B^2) \cos^2 u - 2j AB \sin u \cos u}{A^2 \sin^2 u + (B + C)^2 \cos^2 u} du$$

ou, en désignant par D le dénominateur :

$$R_{ss} = \frac{1}{\pi} \left( A^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 u du}{D} + (C^2 - B^2) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 u du}{D} - 2j AB \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u \cos u du}{D} \right)$$

La résolution de ces trois nouvelles intégrales  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  s'effectue à l'aide d'un changement de variable,

en posant  $t = \operatorname{tg} u$  et  $dt = (1 + t^2) du$ .

On obtient :

$$I_1 = \frac{\pi}{A^2 - (B + C)^2} - \frac{1}{A^2 - (B + C)^2} \cdot \frac{B + C}{A} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left( \frac{A}{B + C} \operatorname{tg} u \right) \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$$

$$I_2 = \frac{\pi}{(B + C)^2 - A^2} + \frac{A}{B + C} \frac{1}{A^2 - (B + C)^2} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left( \frac{A}{B + C} \operatorname{tg} u \right) \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$$



2. The second part of the document focuses on the implementation of the proposed changes. It details the steps involved in the process, from the initial planning stage to the final execution. This section also addresses the potential challenges that may arise during the implementation phase and provides strategies to overcome them.

3. The third part of the document discusses the results of the implementation. It presents the data collected and analyzes the outcomes of the changes. This section also includes a comparison of the results with the initial goals and objectives, highlighting the areas where the changes have been successful and the areas that need further attention.

4. The fourth part of the document provides a summary of the findings and conclusions. It reiterates the importance of maintaining accurate records and the need for continuous improvement. This section also offers recommendations for future actions and provides a final statement on the overall success of the project.

$$I_3 = \frac{1}{2(A^2 - (B + C)^2)} \operatorname{Log} \left( A^2 \sin^2 u \left| \begin{array}{c} + \frac{\pi}{2} \\ - \frac{\pi}{2} \end{array} \right. + (B + C)^2 \cos^2 u \left| \begin{array}{c} + \frac{\pi}{2} \\ - \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \right)$$

qui s'écrivent finalement sous la forme :

$$I_1 = \frac{\pi}{A^2 - (B + C)^2} + \frac{A - B - C}{A}$$

$$I_2 = \frac{\pi}{A^2 - (B + C)^2} + \frac{A - B - C}{B + C}$$

$$I_3 = 0$$

Et l'on obtient pour expression de  $R_{ss}$  :

$$R_{ss} = \frac{(A - B)^2 - C^2}{A^2 - (B + C)^2}$$

et enfin  $R_{ss} = \frac{A - B + C}{A + B + C}$

$$\text{soit : } R_{ss} = \frac{\frac{\beta}{KZ_0} \sin i - \frac{n'\Gamma'}{\mu c} + \frac{\gamma}{KZ_0} \cos i}{\frac{\beta}{KZ_0} \sin i + \frac{n'\Gamma'}{\mu c} + \frac{\gamma}{KZ_0} \cos i}$$

$$\text{ou } R_{ss} = \frac{\frac{\beta \sin i + \gamma \cos i}{KZ_0} - \frac{n'\Gamma'}{\mu c}}{\frac{\beta \sin i + \gamma \cos i}{KZ_0} + \frac{n'\Gamma'}{\mu c}}$$

-----



### CHAPITRE III

=====

## ETUDE PAR TRANSMISSION D'ECHANTILLONS TRANSPARENTS AUX ONDES CENTIMETRIQUES

Comme nous l'avons indiqué précédemment, les études d'anisotropie de certaines substances pour des ondes centimétriques peuvent s'effectuer par transmission. Cette méthode se justifie lorsque les échantillons sont transparents aux ondes utilisées et a déjà été employée pour déterminer la constante diélectrique de corps isotropes (40, 41).

Avant d'examiner l'aspect théorique de cette méthode, nous décrirons sommairement le mode opératoire et les résultats obtenus.

### I - ETUDE EXPERIMENTALE DE LA PROPAGATION D'UNE ONDE DANS UN GUIDE REMPLI D'UNE SUBSTANCE ANISOTROPE

Nous avons réalisé un montage comprenant un générateur d'ondes centimétriques (bande X) excitant un guide cylindrique rempli du corps à étudier, par exemple un cristal uniaxe de quartz ou de rubis.

L'échantillon est taillé en forme de cylindre de façon à ce que l'axe optique soit perpendiculaire à son axe de révolution et situé dans un plan de section droite. L'onde émergente, se propageant dans un guide cylindrique vide, est étudiée à l'aide d'un des analyseurs décrits au chap. VI (28).

Comme en optique classique, pour une longueur d'onde incidente donnée, on analyse la nature de l'onde émergente et l'on mesure, pour de nombreuses positions de l'onde incidente par rapport à l'axe optique de la substance, la rotation et l'ellipticité de l'onde ayant traversé l'échantillon.

On constate alors que, à la précision des mesures près, pour deux positions orthogonales et confondues avec les lignes neutres habituelles, l'onde incidente ne subit aucune altération durant la traversée du milieu uniaxe qui remplit le guide ; il n'y a pas de rotation de l'onde et il n'apparaît aucune ellipticité.

Par contre, pour tout autre angle d'incidence, l'onde émergente a subi une rotation et présente une ellipticité qui peut atteindre : 1, dans certains cas. La portion de guide contenant l'échantillon joue alors





un rôle analogue à celui d'une lame quart d'onde classique et donne une onde émergente polarisée circulairement.

Pour chaque cristal de quartz (42, 43, 44) ou de rubis (45) étudié au Laboratoire, nous avons tracé pour différentes fréquences comprises dans la bande 8,5 - 10 GHz, les courbes donnant la rotation  $\theta$  et l'ellipticité  $|e|$  de l'onde émergente en fonction de l'angle d'incidence  $i$ . Cet angle est celui que fait l'onde incidente avec la direction d'un axe choisi arbitrairement dans un plan parallèle à la face d'entrée du cristal pour en repérer la position.

Les courbes obtenues sont très régulières et permettent de mettre en évidence leurs déformations progressives lorsque la fréquence varie.

Sur ces courbes, on voit apparaître pour les positions  $i_1$  et  $i_2$  les deux lignes neutres où l'onde ne subit aucune modification, tandis qu'elle est fortement perturbée (rotation et ellipticité importantes) pour certaines bandes de fréquences et pour une direction de l'onde différente de celle d'une ligne neutre. Par contre, hors de ces zones, l'onde est peu modifiée lors de la traversée du cristal uniaxe et seule son amplitude subit une atténuation.

A titre d'exemple, les figures III-1, III-2, III-3 et III-4 montrent ces phénomènes relatifs à deux échantillons de quartz :

- quartz I : longueur 29,40 mm ; diamètre 9,40 mm
- quartz II : longueur 15,39 mm ; diamètre 9,96 mm.

Enfin, si l'on fait croître la longueur d'onde, il est possible de constater que pour chaque axe du cristal existe une longueur d'onde de coupure particulière ; ce qui a pu être vérifié dans la gamme de fréquence 8,5 - 10 GHz (44).

On peut donc supposer que l'onde incidente donne naissance, dans la portion du guide rempli du milieu uniaxe, à deux ondes se propageant suivant chaque axe avec une vitesse de propagation différente.

## II - ETUDE POLARIMETRIQUE DE CES PHÉNOMÈNES

L'expérimentation nous ayant amenés à admettre que, suivant deux lignes neutres orthogonales, deux vibrations se propagent avec des longueurs d'onde guidées différentes, il est logique de rapprocher ce fait

./...



QUARTZ I  
Courbes de rotation

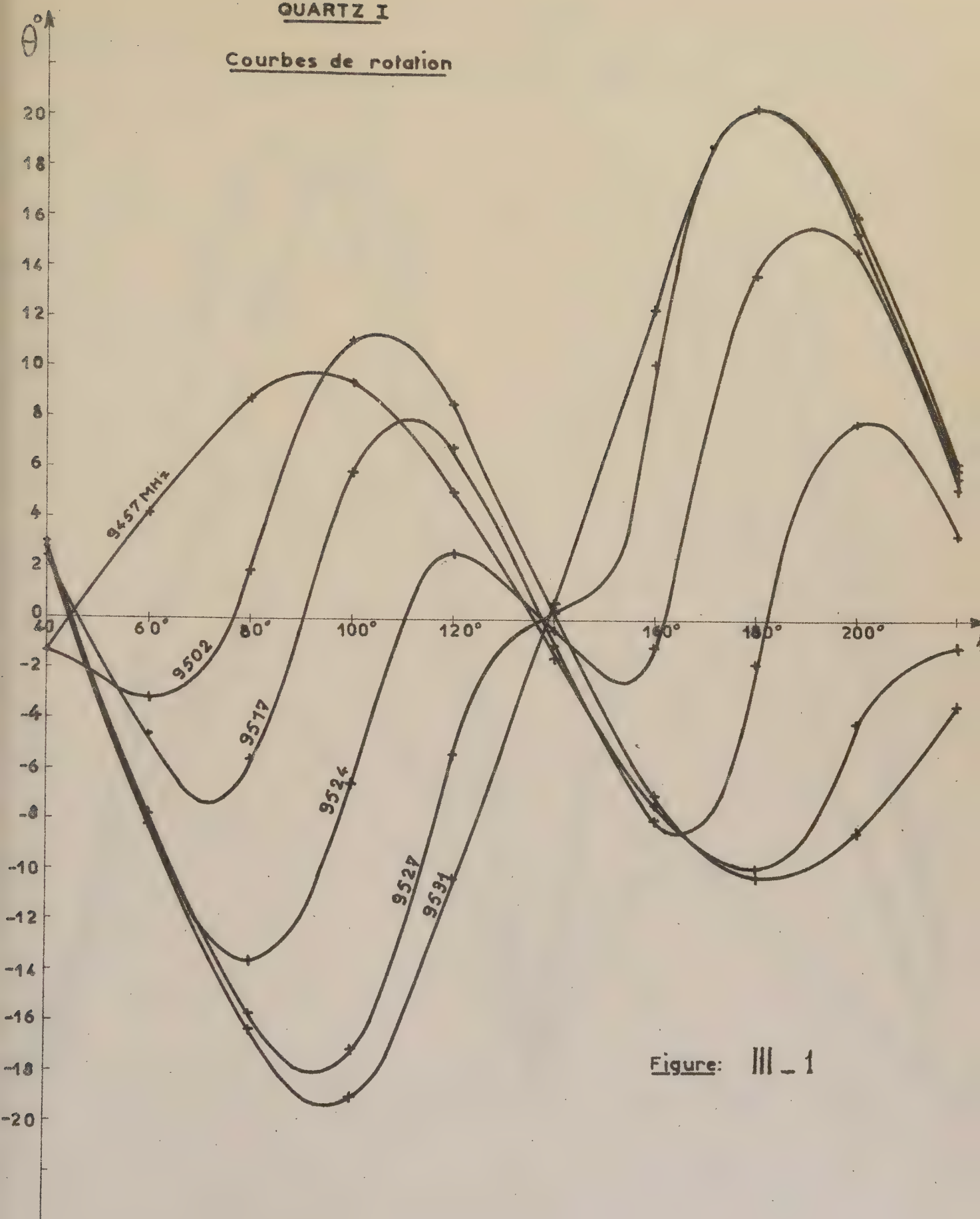


Figure: III - 1



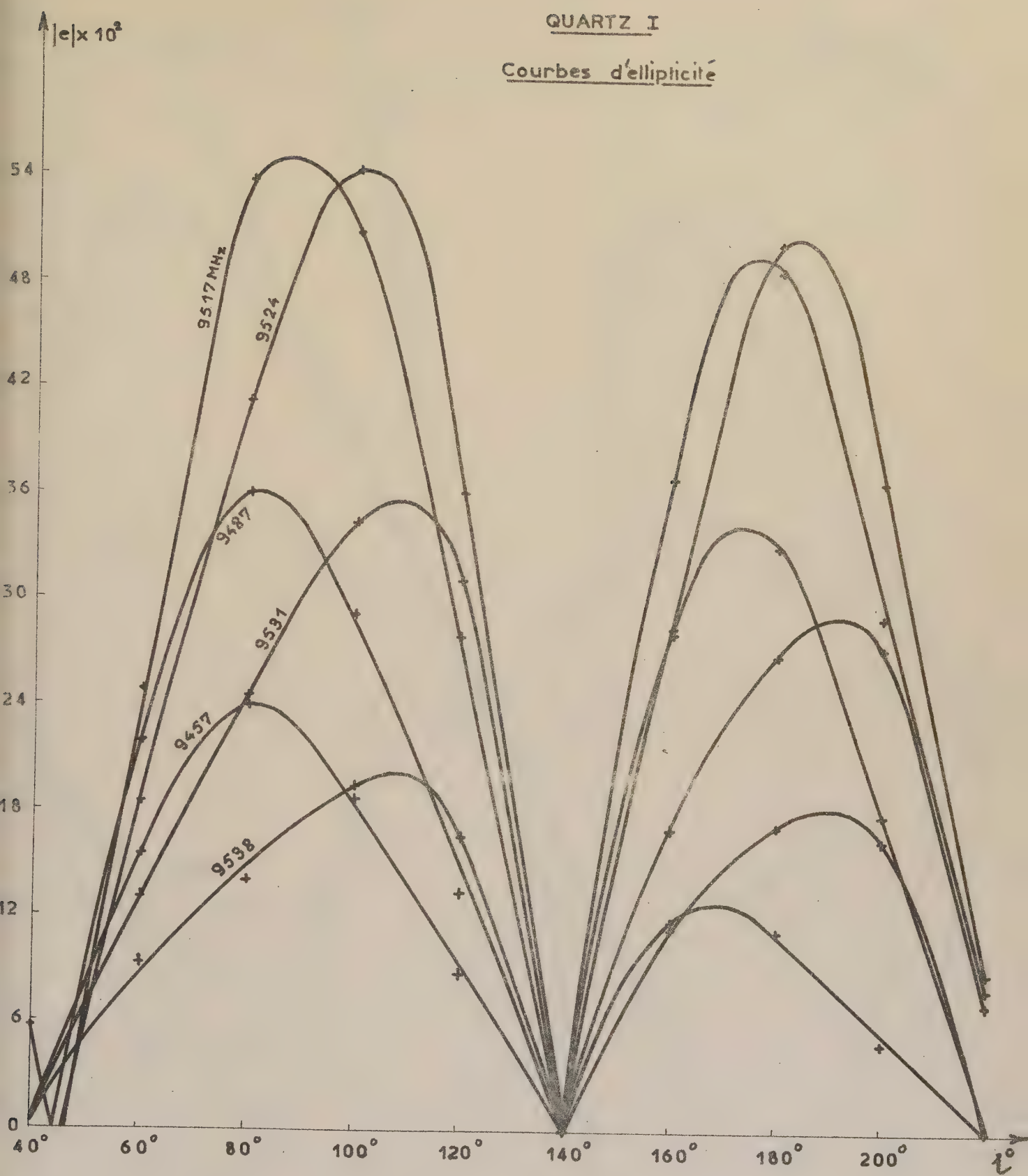


Figure: III - 2





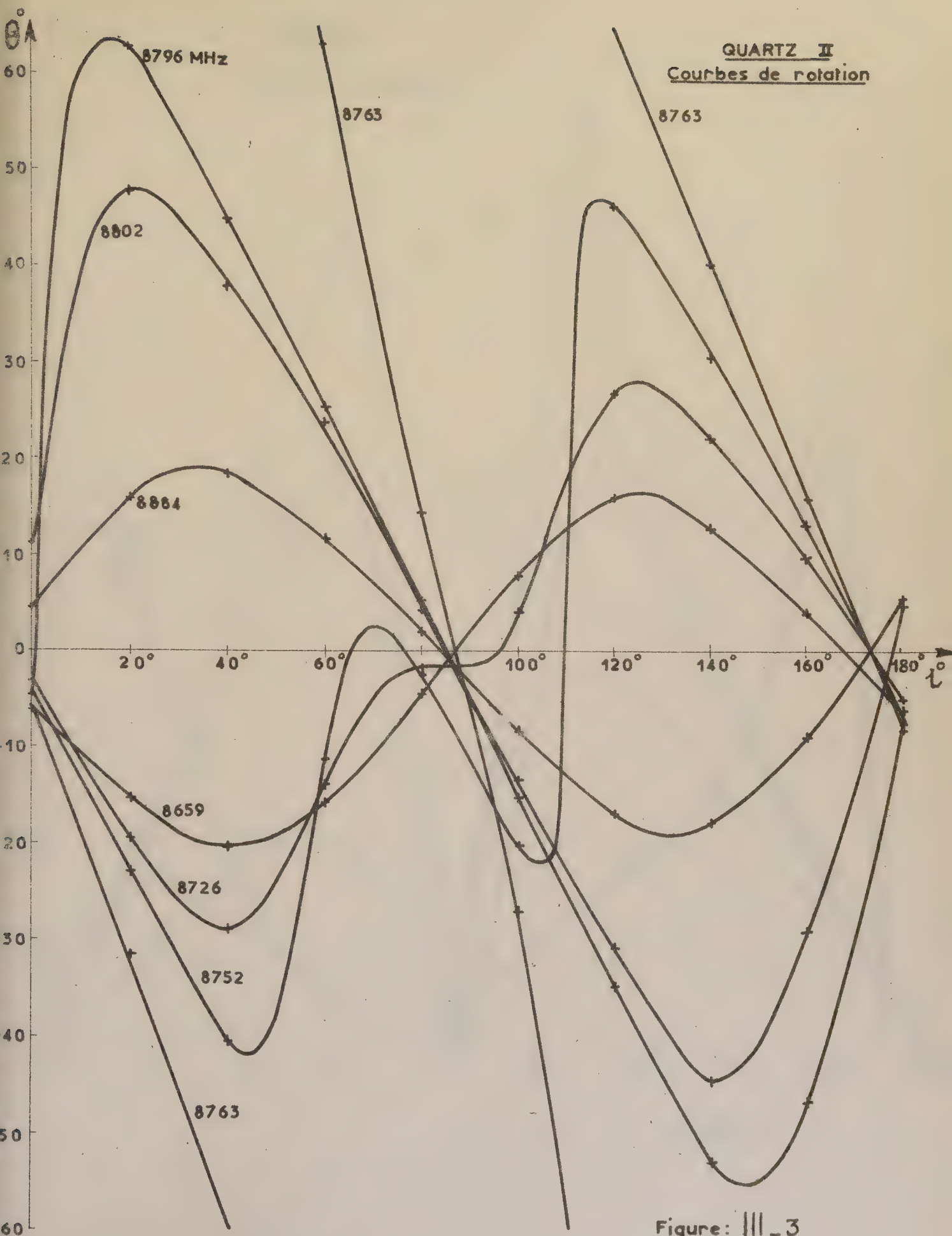


Figure: III\_3



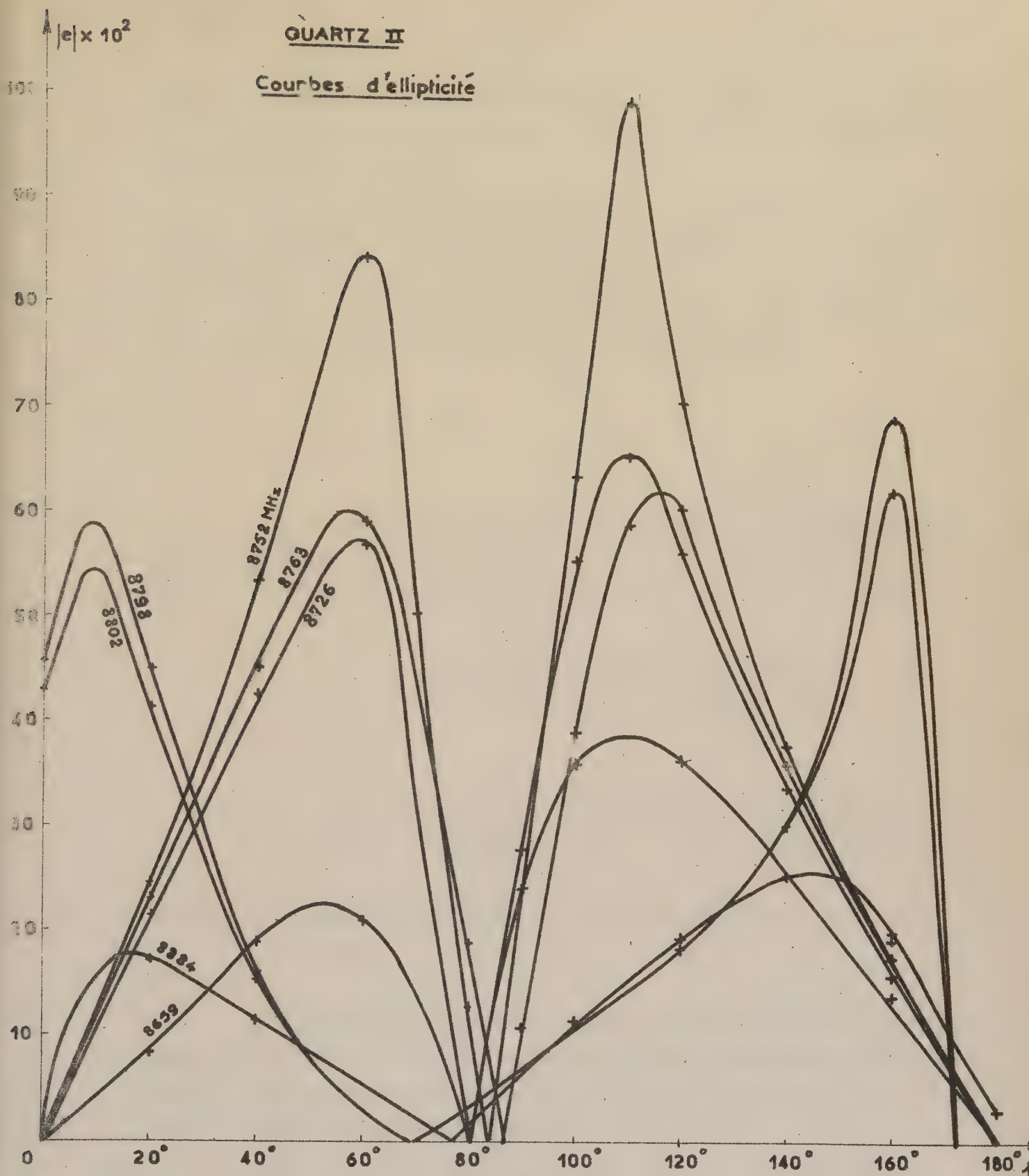


Figure : III - 4





de ce qui se passe en polarimétrie optique, et d'essayer d'étudier les courbes de rotation et d'ellipticité avec les mêmes raisonnements qu'en optique classique.

Nous définissons donc respectivement pour chaque vibration un indice de réfraction  $v$  comme le rapport de la vitesse guidée  $v$  de la vibration parallèle à la direction considérée à la vitesse  $c$  de la lumière dans le vide, et un indice d'extinction  $k$  pour tenir compte de l'absorption. Ainsi nous définissons les deux indices complexes suivants :

$$n' = v' - j k' \quad \text{avec} \quad v' = \frac{c}{v'}$$

$$n'' = v'' - j k'' \quad \text{avec} \quad v'' = \frac{c}{v''}$$

Il est alors possible d'exprimer en fonction de  $i$ , angle de l'onde incidente avec un des axes, la rotation  $\theta$  et l'ellipticité  $|e|$  de l'onde après la traversée du guide contenant le milieu anisotrope de longueur  $l$  :

$$\theta = \frac{1}{2} \text{Arc tg} \left( \frac{\sin 2i (\text{ch } \psi - \cos \varphi) - \text{tg } 2i \text{ sh } \psi}{\cos 2i (\text{ch } \psi - \cos \varphi) + \frac{\cos \varphi}{\cos 2i} - \text{sh } \psi} \right)$$

$$|e| = \frac{\sin \varphi}{\frac{e^{-\psi}}{\text{tg } i} - \frac{\text{ch } \psi \cos 2i - \text{sh } \psi}{\sin 2i} \pm \sqrt{\cos^2 \varphi + \left( \frac{\text{ch } \psi \cos 2i - \text{sh } \psi}{\sin 2i} \right)^2}}$$

où nous représentons par  $\varphi$  et  $\psi$  les différences de phase

$$\varphi = \frac{\omega l}{c} (v' - v'') \quad \psi = \frac{\omega l}{c} (k' - k'').$$

L'étude de ces courbes théoriques en fonction de  $\varphi$  et  $\psi$  permet de retrouver l'allure des courbes expérimentales en choisissant judicieusement ces deux paramètres. C'est ce qui a été fait pour retrouver les courbes expérimentales mentionnées plus haut (43, 46).

Cependant, cette interprétation des phénomènes repose sur la définition de deux indices liant les vitesses guidées à celle de la lumière et l'hypothèse d'une traversée unique de la lame, ce qui revient à négliger les phénomènes de réflexion sur le dioptré d'entrée et celui de sortie.



### III - THEORIE DE LA TRANSMISSION D'UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE DANS UN GUIDE CONTENANT UNE LAME BIREFRINGENTE

Nous considérons une ligne de mesure dont une section est remplie par une lame biréfringente d'épaisseur  $\ell$ . L'onde incidente pénètre dans la lame avec l'amplitude  $E_0$  et se décompose en deux vibrations orthogonales, l'une parallèle à  $Ox$ , l'autre à  $Oy$ , se propageant avec les constantes de propagation  $\gamma$  et  $\gamma'$ , suivant  $Oz$ . Pour faire une étude générale nous supposons qu'il y a atténuation des vibrations, ce qui se traduit par des expressions complexes de  $\gamma$  et  $\gamma'$  :

$$\gamma = \gamma_1 - j \gamma_2$$

$$\gamma' = \gamma'_1 - j \gamma'_2$$

D'autre part, en raison de la faible anisotropie présentée par les échantillons étudiés, nous admettons en première approximation que le coefficient de réflexion  $\rho$  (lamme cristalline  $\rightarrow$  guide vide) est le même pour les deux composantes orthogonales.

Les vibrations transmises ont alors pour expressions :

parallèlement à  $Ox$ ,  $E_0 \cos i e^{-\gamma_2 \ell} e^{j(\omega t - \gamma_1 \ell)} (1 - \rho)$

$$\cdot (1 + \rho^2 e^{-2\gamma_2 \ell} e^{-2j\gamma_1 \ell} + \dots + \rho^{2p} e^{-2p\gamma_2 \ell} e^{-2pj\gamma_1 \ell} + \dots)$$

parallèlement à  $Oy$ ,  $E_0 \sin i e^{-\gamma'_2 \ell} e^{j(\omega t - \gamma'_1 \ell)} (1 - \rho)$

$$\cdot (1 + \rho^2 e^{-2\gamma'_2 \ell} e^{-2j\gamma'_1 \ell} + \dots + \rho^{2p'} e^{-2p'\gamma'_2 \ell} e^{-2p'j\gamma'_1 \ell} + \dots)$$

Soit 
$$\frac{E_0 \cos i e^{-\gamma_2 \ell} e^{j(\omega t - \gamma_1 \ell)} (1 - \rho)}{1 - \rho^2 e^{-2\gamma_2 \ell} e^{-2j\gamma_1 \ell}}$$

et 
$$\frac{E_0 \sin i e^{-\gamma'_2 \ell} e^{j(\omega t - \gamma'_1 \ell)} (1 - \rho)}{1 - \rho^2 e^{-2\gamma'_2 \ell} e^{-2j\gamma'_1 \ell}}$$



Le calcul permet de retrouver les mêmes expressions pour  $\theta$  et  $e$  que celles données au paragraphe précédent, à savoir :

$$\theta = \frac{1}{2} \text{Arc tg} \left( \frac{\sin 2i (\text{ch} \psi - \cos \varphi) - \text{tg } 2i \text{ sh } \psi}{\cos 2i (\text{ch} \psi - \cos \varphi) + \frac{\cos \varphi}{\cos 2i} - \text{sh } \psi} \right)$$

En posant  $\varphi = u - u'$

donnés par :

$$\left. \begin{aligned} u &= \text{Arc tg} \left( \frac{-\rho^2 e^{-2\gamma_2 l} \sin(\omega t + \gamma_1 l) + \sin(\omega t - \gamma_1 l)}{\cos(\omega t - \gamma_1 l) - \rho^2 e^{-2\gamma_1 l} \cos(\omega t + \gamma_1 l)} \right) x \\ x &= \frac{E_0 \cos i (1 - \rho) e^{-\gamma_2 l}}{\sqrt{1 + \rho^4 e^{-2\gamma_2 l} - 2\rho^2 e^{-2\gamma_2 l} \cos 2\gamma_1 l}} \\ u' &= \text{Arc tg} \left( \frac{-\rho^2 e^{-2\gamma'_2 l} \sin(\omega t + \gamma'_1 l) + \sin(\omega t - \gamma'_1 l)}{-\rho^2 e^{-2\gamma'_2 l} \cos(\omega t + \gamma'_1 l) + \cos(\omega t - \gamma'_1 l)} \right) x \\ x &= \frac{E_0 \sin i (1 - \rho) e^{-\gamma'_2 l}}{\sqrt{1 + \rho^4 e^{-2\gamma'_2 l} - 2\rho^2 e^{-2\gamma'_2 l} \cos 2\gamma'_1 l}} \end{aligned} \right\}$$

et en posant  $\psi = T - T'$

donnés par :

$$e^T = \frac{(1 - \rho) e^{-\gamma_2 l}}{\sqrt{1 + \rho^4 e^{-2\gamma_2 l} - 2\rho^2 e^{-2\gamma_2 l} \cos 2\gamma_1 l}}$$

$$e^{T'} = \frac{(1 - \rho) e^{-\gamma'_2 l}}{\sqrt{1 + \rho^4 e^{-2\gamma'_2 l} - 2\rho^2 e^{-2\gamma'_2 l} \cos 2\gamma'_1 l}}$$



1. The first part of the paper is devoted to the study of the

properties of the function  $f(x)$  defined by the equation

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

It is well known that the function  $f(x)$  is increasing and concave down

on the interval  $(-\infty, \infty)$ . The function  $f(x)$  is also bounded

on the interval  $(-\infty, \infty)$ . The function  $f(x)$  is also bounded

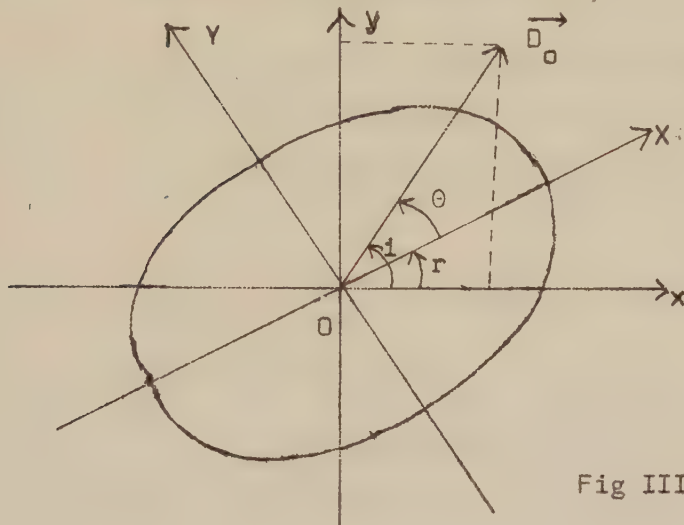
on the interval  $(-\infty, \infty)$ . The function  $f(x)$  is also bounded

on the interval  $(-\infty, \infty)$ . The function  $f(x)$  is also bounded

on the interval  $(-\infty, \infty)$ . The function  $f(x)$  is also bounded

IV - ETABLISSEMENT DES EXPRESSIONS DE  $\theta$  et  $|e|$ 

Soient  $Ox$  et  $Oy$  les lignes neutres de la lame,  $\vec{D}_0$  le vecteur représentant la vibration incidente,  $OX$  et  $OY$  les axes de l'ellipse représentant la vibration après la traversée du cristal.



Soient aussi :

$i$  l'angle  $(\vec{OX}, \vec{OD}_0)$

$r$  l'angle  $(\vec{OX}, \vec{OX'})$

$\theta$  l'angle  $(\vec{OX}, \vec{OX'})$

Fig III-5

Les composantes de  $\vec{D}_0$  sur les lignes neutres sont :

$$x = D_0 \cos i \cos \omega t$$

$$y = D_0 \sin i \cos \omega t$$

A la sortie de la lame les composantes deviennent :

$$x = D_0 \cos i e^{-\frac{\omega k' l}{c}} \cos \omega t$$

$$y = D_0 \sin i e^{-\frac{\omega k'' l}{c}} \cos(\omega t - \varphi)$$

(en choisissant convenablement l'origine des temps).

Dans ces relations,  $\omega$  est la pulsation,  $l$  l'épaisseur de la lame,  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide,  $\varphi$  le déphasage entre les deux composantes donné par  $\varphi = \frac{2\pi(\nu'' - \nu')l}{\lambda}$ ,  $\lambda$  étant la longueur d'onde dans le vide. Un changement d'axes va nous permettre d'écrire les composantes dans le système d'axes  $(OX, OY)$ .

$$X = x \cos r + y \sin r$$

$$Y = -x \sin r + y \cos r.$$

Les nouvelles composantes se mettent ainsi sous la forme :

$$X = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$Y = C \cos \omega t + D \sin \omega t.$$



OX et OY étant les axes de l'ellipse, les composantes X et Y peuvent se mettre sous la forme :

$$X = a \cos (\omega t + \varphi)$$

$$Y = b \sin (\omega t + \varphi)$$

Par identification on trouve que les fonctions A, B, C, D doivent être reliées par la relation  $\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = -1$ .

a) Rotation du maximum de la vibration -

$$\text{La relation } \frac{AC}{BD} = -1 \text{ conduit à } \operatorname{tg} 2r = \frac{\sin 2i \cos \varphi}{\operatorname{ch} \psi \cos 2i - \operatorname{sh} \psi}$$

$$\text{avec } \psi = \frac{\omega l}{c} (k' - k'').$$

La rotation du maximum de la vibration est donnée par l'angle  $\theta = i - r$  ; l'expression de  $\operatorname{tg} 2r$  permet d'écrire :

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{\sin 2i (\operatorname{ch} \psi - \cos \varphi) - \operatorname{tg} 2i \operatorname{sh} \psi}{\cos 2i (\operatorname{ch} \psi - \cos \varphi) + \frac{\cos \varphi}{\cos 2i} - \operatorname{sh} \psi}$$

$$\text{d'où : } \theta = \frac{1}{2} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left( \frac{\sin 2i (\operatorname{ch} \psi - \cos \varphi) - \operatorname{tg} 2i \operatorname{sh} \psi}{\cos 2i (\operatorname{ch} \psi - \cos \varphi) + \frac{\cos \varphi}{\cos 2i} - \operatorname{sh} \psi} \right)$$

b) Ellipticité -

Lorsqu'on écrit l'équation de l'ellipse sous la forme :

$$X = a \cos (\omega t + \varphi)$$

$$Y = b \sin (\omega t + \varphi)$$

l'ellipticité est égale à l'un des rapports  $\frac{a}{b}$  ou  $\frac{b}{a}$  suivant que  $a < b$  ou  $b < a$ .

$$\text{On obtient : } \frac{b}{a} = \frac{D}{A} = -\frac{C}{B}$$

d'où :

$$e = \frac{\sin \varphi}{\frac{e^{-\psi}}{\operatorname{tg} i} + \operatorname{tg} r \cos \varphi}$$

$$= \frac{\sin \varphi}{\frac{e^{-\psi}}{\operatorname{tg} i} - \frac{\operatorname{ch} \psi \cos 2i - \operatorname{sh} \psi}{\sin 2i} \pm \sqrt{\cos^2 \varphi + \left( \frac{\operatorname{ch} \psi \cos 2i - \operatorname{sh} \psi}{\sin 2i} \right)^2}}$$

1. The first part of the paper is devoted to the study of the properties of the function  $f(x)$  defined by the equation

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

It is shown that the function  $f(x)$  is continuous and differentiable on the interval  $(-\infty, \infty)$ . The derivative of the function is given by the formula

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

It is also shown that the function  $f(x)$  is bounded on the interval  $(-\infty, \infty)$ . The maximum and minimum values of the function are given by the formulas

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

It is also shown that the function  $f(x)$  is concave up on the interval  $(-\infty, \infty)$ .

The second part of the paper is devoted to the study of the properties of the function  $g(x)$  defined by the equation

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

It is shown that the function  $g(x)$  is continuous and differentiable on the interval  $(-\infty, \infty)$ . The derivative of the function is given by the formula



## V - EXPRESSION DU COEFFICIENT DE REFLEXION

Deux cas sont à considérer :

- 1°) Les deux éléments de guide ont même section.
- 2°) Les deux éléments de guide sont de sections différentes.

Nous examinerons ces deux cas l'un après l'autre, en rappelant que nous supposons que dans tout le dispositif seuls peuvent se propager les modes fondamentaux. Ceci est d'ailleurs simplement obtenu en choisissant convenablement la section des guides utilisés de part et d'autre du porte-échantillon.

En effet, on peut montrer théoriquement (47) que, lorsque les guides adjacents à un élément donné ne permettent la propagation que du mode fondamental, c'est un mode identique qui assure la propagation de l'onde dans l'élément intermédiaire. C'est pour obtenir ce résultat que nous utilisons des guides vides de section circulaire possédant un diamètre de 22,80 mm.

### 1°) Guides de même section -

Considérons deux éléments 1 et 2 de guides consécutifs de même section, l'un vide, l'autre contenant l'échantillon étudié de permittivité moyenne  $\epsilon_m$ . Ces deux éléments sont séparés par un dioptré plan, et nous voulons calculer le coefficient de réflexion pour une onde se propageant de la section pleine 2 vers la section vide 1. L'extension de la théorie des lignes aux cas de la propagation guidée (23) permet d'écrire :

$$|\rho| = \left| \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right|, \quad Z_1 \text{ et } Z_2 \text{ étant respectivement les impédances de chaque section.}$$

Les modes fondamentaux TE étant seuls utilisés, il est facile d'exprimer l'impédance de chaque portion de guide.

Nous avons :

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{\lambda_{g0}}{\lambda} \quad \text{et} \quad Z_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_m}} \frac{\lambda_{gm}}{\lambda}$$

$\lambda_{g0}$  et  $\lambda_{gm}$  étant respectivement les longueurs d'onde guidée dans les éléments de permittivité  $\epsilon_0$  et  $\epsilon_m$ .

$$\text{Donc :} \quad |\rho| = \left| \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_m}} \lambda_{gm} - \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \lambda_{g0}}{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_m}} \lambda_{gm} + \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \lambda_{g0}} \right|$$



## 2°) Guides de section différente

---

Considérons maintenant deux éléments consécutifs, l'un vide de section  $S_1$ , l'autre contenant l'échantillon de section  $S_2$ . Admettons que les lignes des champs électriques et magnétiques correspondant aux deux sections peuvent être confondues sur la surface de séparation.

On a expérimentalement  $S_1 > S_2$ . Etant donné le théorème de réciprocité (48), le module du coefficient de réflexion est le même quel que soit le sens de propagation. La détermination de ce coefficient est plus facile à faire dans le sens  $1 \rightarrow 2$  que dans le sens opposé, mais dépend pour les détails du calcul de la forme géométrique des sections. En raison de cette diversité nous indiquerons simplement la méthode utilisée.

Nous supposons que l'onde incidente a une énergie  $W$  correspondant à une amplitude  $E_1$ . On décompose son flux d'énergie en deux parties, l'une correspondant à la surface  $S_2$ , l'autre à la surface  $S_1 - S_2$ . Cette dernière partie  $W'$  est totalement réfléchie et on peut la calculer facilement. Sur la surface  $S_2$ , la continuité des composantes tangentielles des champs  $E$  et  $H$ , permet de calculer, par la méthode classique, un coefficient de réflexion  $r''$ . L'énergie réfléchie sur la surface  $S_2$  est alors  $(r'')^2 W$ . L'énergie totale réfléchie est alors  $W' + (r'')^2 W$  et le coefficient de réflexion cherché est donné par :

$$\rho^2 = \frac{W' + (r'')^2 W}{W}$$

ce qui peut s'écrire :

$$\rho^2 = \frac{(r'')^2 W + W' (1 - (r'')^2)}{W}$$

## VI - DETERMINATION DES PERMITTIVITES D'UNE LAME BIREFRINGENTE

La méthode que nous proposons (28) tient compte de la propagation avec réflexions multiples dont nous venons d'exposer la théorie. Expérimentalement, on trace les courbes de rotation et d'ellipticité obtenues pour une onde de fréquence donnée et une lame d'épaisseur connue. A l'aide d'une calculatrice numérique on calcule successivement pour des couples de deux valeurs de la permittivité ( $\epsilon$  et  $\epsilon'$ ), les valeurs de  $\lambda_{go}$  et  $\lambda_{gm}$ , puis  $\rho$ ,  $\gamma$  et  $\gamma'$ , et enfin  $\theta$  et  $|e|$ . On trace alors les courbes théoriques de  $\theta$  et  $|e|$  et on les compare aux courbes expérimentales. Par approximations successives, en faisant varier  $\epsilon$  et  $\epsilon'$ , on cherche à les faire coïncider. La coïncidence a lieu lorsqu'on donne à  $\epsilon$  et  $\epsilon'$  les valeurs que l'on cherche. Pour éviter une perte de temps sensible, il est

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

24

25

26

27

28

29

30

31

32

33

34

35

36

37

38

39

40

41

42

43

44

45

46

47

48

49

50

51

52

53

54

55

56

57

58

59

60

61

62

63

64

65

66

67

68

69

70

71

72

73

74

75

76

77

78

79

80

81

82

83

84

85

86

87

88

89

90

91

92

93

94

95

96

97

98

99

100

possible de choisir les valeurs initiales de  $\epsilon$  et  $\epsilon'$  déterminées de façon approximative par la mesure des longueurs d'onde de coupure du guide contenant l'échantillon. Cette méthode de calcul a été développée avec succès au Laboratoire pour l'étude des permittivités relatives du quartz en bande X (49-50). Cette interprétation suppose qu'il existe bien, dans le guide contenant l'échantillon, deux ondes orthogonales de même structure se propageant avec des constantes de propagation différentes.

Dans les chapitres suivants, nous allons examiner la propagation dans un guide contenant un milieu anisotrope et donner les expressions des constantes de propagation.

-----





## CHAPITRE IV

=====

ETUDE DE LA PROPAGATION D'UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE DANS UN GUIDE  
DE SECTION RECTANGULAIRE REMPLI D'UNE SUBSTANCE ANISOTROPE

Nous avons étudié la propagation d'une onde électromagnétique dans un guide de section rectangulaire rempli d'une substance anisotrope (28).

Bien que la vitesse de phase soit la seule grandeur dont nous avons besoin, nous déterminerons également les expressions mathématiques des diverses composantes du champ électromagnétique. Ceci nous permettra de préciser la nature des vibrations transmises et d'établir la liaison entre le cas général que nous étudions et celui bien connu d'un guide rempli d'un diélectrique isotrope.

Nous nous limiterons aux trois cas particuliers où l'axe optique est parallèle à l'un des axes de coordonnées du guide, car ce n'est que dans ces conditions que l'on peut obtenir des résultats relativement simples.

En effet, nous nous sommes heurtés à des difficultés de calcul ne permettant pas d'obtenir de solutions analytiques, en dehors des cas particuliers cités (51). Ceci n'entraîne pas de difficultés pour l'étude expérimentale car les techniques modernes de taille et de contrôle des cristaux permettent de disposer d'échantillons de côtes très précises.

Nous allons utiliser un repère orthonormé dont l'origine est prise sur une arête du guide et dont les axes sont parallèles aux arêtes de celui-ci (fig. IV, 1).

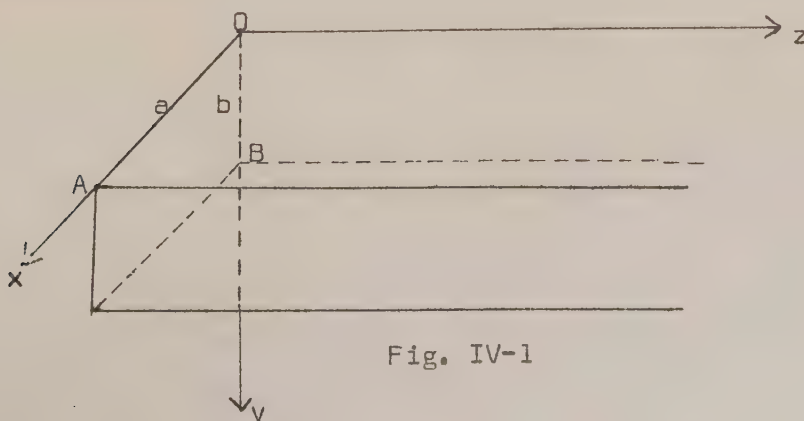


Fig. IV-1

./...



La direction de propagation est celle de l'axe Oz.

Les dimensions du guide sont  $a = OA$  et  $b = OB$ .

Les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\text{Rot } \vec{E} = -\mu \frac{d\vec{H}}{dt}$$

$$\text{Rot } \vec{H} = \frac{d\vec{D}}{dt}$$

$$\text{Div } \vec{B} = 0$$

$$\text{Div } \vec{D} = 0$$

étant précisé que le milieu étudié est dépourvu de charges électriques vraies.

### I - CAS D'UNE SUBSTANCE UNIAXE

#### A) Axe optique suivant Oy -

La permittivité est représentée par la matrice :

$$\begin{vmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon' & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{vmatrix}$$

ce qui permet d'écrire les relations suivantes entre les composantes du vecteur excitation électrique  $\vec{D}$  et du vecteur champ électrique  $\vec{E}$  :

$$D_x = \epsilon E_x$$

$$D_y = \epsilon' E_y$$

$$D_z = \epsilon E_z$$

et les équations de Maxwell sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\text{Rot } \vec{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -j \omega \mu H_x = -j K Z H_x \\ (\text{Rot } \vec{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j \omega \mu H_y = -j K Z H_y \\ (\text{Rot } \vec{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j \omega \mu H_z = -j K Z H_z \end{array} \right.$$





$$\left\{ \begin{array}{l} (\text{Rot } \vec{H})_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j \omega D_x = j \omega \epsilon E_x = j \frac{K}{Z} E_x \\ (\text{Rot } \vec{H})_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j \omega D_y = j \omega \epsilon' E_y = j \frac{K'}{Z'} E_y \\ (\text{Rot } \vec{H})_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j \omega D_z = j \omega \epsilon E_z = j \frac{K}{Z} E_z \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

dans lesquelles :

K et K' sont les modules des vecteurs d'onde définis respectivement par :

$$K^2 = \omega^2 \mu \epsilon \quad \text{et} \quad K'^2 = \omega^2 \mu \epsilon'$$

Z et Z' sont les impédances d'onde données par :

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad \text{et} \quad Z' = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}}$$

et  $\omega$  la pulsation de la vibration sinusoïdale considérée.

Par éliminations successives, à condition que l'opérateur  $\omega^2 \mu \epsilon + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  ne soit pas nul, nous obtenons les deux équations suivantes, ne contenant que  $E_y$  et  $H_y$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} j \omega \epsilon (\omega^2 \mu \epsilon + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\epsilon'}{\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon' \right) E_y = 0 \\ j \omega \mu (\omega^2 \mu \epsilon + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon \right) H_y = 0 \end{array} \right.$$

Comme nous avons supposé  $\omega^2 \mu \epsilon + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \neq 0$ , ce qui sera confirmé par le résultat final, les solutions cherchées sont identiques à celles



du système :

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\epsilon'}{\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon' \right) E_y = 0 \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon \right) H_y = 0 \end{cases}$$

qui peut s'écrire, en introduisant les vecteurs d'onde K et K' :

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\epsilon'}{\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + K'^2 \right) E_y = 0 \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + K^2 \right) H_y = 0 \end{cases}$$

La dernière équation a la forme bien connue de l'équation de Laplace :

$$\Delta H_y + K^2 H_y = 0$$

Elle admet donc comme solution :

$$H_y = H_0 \frac{\sin \alpha x}{\cos \alpha x} \sin \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)}$$

compte tenu des conditions aux limites  $H_y = 0$  pour  $y = 0$  et  $y = b$ .

$$\text{Avec } \beta = \frac{n\pi}{b}$$

$$\text{et } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = K^2 \quad (1)$$

Quant à l'autre équation, on peut l'écrire :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\epsilon'}{\epsilon} \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + K'^2 E_y = 0$$

ce qui est une forme voisine de celle de Laplace.

Par analogie, cherchons une solution de la forme

$$E_y = E_0 \frac{\sin \alpha' x}{\cos \alpha' x} \sin \beta' y e^{j(\omega t - \gamma' z)}$$

en tenant compte des conditions aux limites :  $E_y = 0$  pour  $x = 0$  et  $x = a$ .

Nous obtenons :

$$E_y = E_0 \sin \alpha' x \frac{\sin \beta' y}{\cos \beta' y} e^{j(\omega t - \gamma' z)}$$

$$\text{avec } \alpha' = \frac{m'\pi}{a}$$

$$\text{et } \alpha'^2 + \frac{\epsilon'}{\epsilon} \beta'^2 + \gamma'^2 = K'^2 \quad (2)$$



Nous allons maintenant déduire les relations liant respectivement :

$$E_x, E_z, H_x \text{ et } H_z \text{ à } E_y \text{ et } H_y.$$

$E_x$  est solution de l'équation :

$$E_x + \frac{1}{K^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = \frac{jZ}{K} \frac{\partial H_y}{\partial z} + \frac{1}{K^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y}$$

On peut l'obtenir en combinant linéairement une solution de l'équation sans second membre avec une solution particulière de l'équation complète.

L'équation sans second membre admet une solution de la forme :

$$E_x = A(x) B(y) e^{j(\omega t - \gamma z)}$$

Elle peut donc s'écrire :

$$A(x) B(y) e^{j(\omega t - \gamma z)} + \frac{1}{K^2} A(x) B''(y) e^{j(\omega t - \gamma z)} = 0$$

$$\text{Si } A(x) \neq 0 \text{ on a : } B(y) + \frac{1}{K^2} B''(y) = 0$$

D'où :

$$B(y) = C_1 \sin Ky + C_2 \cos Ky.$$

Les conditions aux limites ( $E_x = 0$  pour  $y = 0$  et  $y = b$  quel que soit  $x$ ) exigent  $C_1 = 0$  et  $C_2 = 0$  correspondant à une solution identiquement nulle.

Ainsi la solution cherchée se réduit à une solution particulière de l'équation avec second membre :

$$E_x = \frac{KZ\gamma}{K^2 - \beta^2} H_0 \frac{\cos \alpha x \sin \beta y}{\sin \alpha} e^{j(\omega t - \gamma z)} - \frac{\alpha' \beta'}{K^2 - \beta'^2} \cos \alpha' x \sin \beta' y e^{j(\omega t - \gamma' z)}$$

où l'on choisit les fonctions sinusoïdales en  $x$  et en  $y$  de façon à vérifier les conditions aux limites.

On obtient les valeurs de  $E_z, H_x$  et  $H_z$  en opérant de même façon. Leurs expressions sont obtenues par la résolution des équations suivantes :

$$E_z + \frac{1}{K^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = - \frac{jZ}{K} \frac{\partial H_y}{\partial x} + \frac{1}{K^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial z}$$

$$H_x + \frac{1}{K^2} \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} = - \frac{j}{KZ} \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{1}{K^2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial y}$$





$$H_z + \frac{1}{K^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = \frac{j}{KZ} \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{1}{K^2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial y \partial z}$$

En définitive, les expressions pour les différentes composantes des champs ont pour valeur :

$$\left\{ \begin{aligned} E_x &= \frac{KZ\gamma}{K^2 - \beta^2} H_0 \cos \alpha x \sin \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)} \\ &\quad - \frac{\alpha'\beta'}{K^2 - \beta'^2} E_0 \cos \alpha'x \sin \beta'y e^{j(\omega t - \gamma'z)} \\ E_y &= E_0 \sin \alpha'x \cos \beta'y e^{j(\omega t - \gamma'z)} \\ E_z &= \frac{jKZ\alpha}{K^2 - \beta^2} H_0 \sin \alpha x \sin \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)} \\ &\quad + \frac{j\gamma'\beta'}{K^2 - \beta'^2} E_0 \sin \alpha'x \sin \beta'y e^{j(\omega t - \gamma'z)} \\ H_x &= \frac{-\alpha\beta}{K^2 - \beta^2} H_0 \sin \alpha x \cos \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)} \\ &\quad - \frac{K\gamma'}{Z(K^2 - \beta'^2)} E_0 \sin \alpha'x \cos \beta'y e^{j(\omega t - \gamma'z)} \\ H_y &= H_0 \cos \alpha x \sin \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)} \\ H_z &= \frac{-j\gamma\beta}{K^2 - \beta^2} H_0 \cos \alpha x \cos \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)} \\ &\quad + \frac{jK\alpha'}{Z(K^2 - \beta'^2)} E_0 \cos \alpha'x \cos \beta'y e^{j(\omega t - \gamma'z)} \end{aligned} \right.$$

Le système complété par les relations (1) et (2) qui s'écrivent finalement sous la forme :

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \gamma^2 = K^2 \quad (3)$$

$$\left(\frac{m'\pi}{a}\right)^2 + \frac{\epsilon'}{\epsilon} \left(\frac{n'\pi}{b}\right)^2 + \gamma'^2 = K'^2 \quad (4)$$

ou, en introduisant les longueurs d'onde guidées  $\lambda_g$  et  $\lambda'_g$

$$\frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{k}{\lambda_0^2} - \frac{m^2}{4a^2} - \frac{n^2}{4b^2}$$



$$\frac{1}{\lambda'_g{}^2} = \frac{k'}{\lambda_o{}^2} - \frac{m'^2}{4a^2} - \frac{k'}{k} \frac{n'^2}{4b^2}$$

relations dans lesquelles  $k$  et  $k'$  sont les deux constantes diélectriques de la substance étudiée.

Sous cette forme, on voit qu'il existe deux ondes guidées se propageant avec les longueurs d'onde  $\lambda_g$  et  $\lambda'_g$ , mais on ne retrouve pas directement les résultats bien connus de la propagation dans un guide rempli d'une substance isotrope.

Pour y remédier, modifions l'écriture des champs, en posant :

$$E_o = - (E'_o + \frac{\beta}{\alpha} \frac{\gamma Z}{K} H'_o)$$

$$\text{et } H_o = - (H'_o - \frac{\beta}{\alpha} \frac{\gamma}{KZ} E'_o)$$

Et l'on obtient les expressions des champs sous la nouvelle forme suivante qui, compte tenu de ce que dans un milieu isotrope les paramètres  $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$  sont identiques à  $\alpha', \beta', \gamma', \epsilon'$ , fait apparaître la séparation des modes TE et TM, et est analogue à celle que l'on obtient par l'étude directe de la propagation dans un milieu isotrope (24).

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = \frac{\beta}{\alpha} E'_o \cos \alpha x \sin \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)} \\ \quad - \frac{\gamma Z}{K} H'_o \cos \alpha x \sin \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)} \\ E_y = - E'_o \sin \alpha x \cos \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)} \\ \quad - \frac{\beta}{\alpha} \frac{\gamma Z}{K} H'_o \sin \alpha x \cos \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)} \\ E_z = 0 \quad - \frac{jZ(K^2 - \gamma^2)}{\alpha K} H'_o \sin \alpha x \sin \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_x = \frac{\gamma}{KZ} E'_o \sin \alpha x \cos \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)} \\ \quad + \frac{\beta}{\alpha} H'_o \sin \alpha x \cos \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)} \\ H_y = \frac{\beta}{\alpha} \frac{\gamma}{KZ} E'_o \cos \alpha x \sin \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)} \\ \quad - H'_o \cos \alpha x \sin \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)} \\ H_z = \frac{-j(K^2 - \gamma^2)}{\alpha KZ} E'_o \cos \alpha x \cos \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)} + 0 \end{array} \right. \quad \dots$$





### B) Axe optique suivant Ox

Dans ce cas la permittivité est représentée par la matrice :

$$\begin{vmatrix} \epsilon' & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{vmatrix}$$

La méthode de résolution est identique à celle du cas précédent, mais ce sont  $E_x$  et  $H_x$  qui sont maintenant solutions des équations de Laplace, comme l'étaient précédemment  $E_y$  et  $H_y$ .

Ce qui revient à changer :

$$\begin{array}{lll} \alpha \text{ en } \beta & \alpha' \text{ en } \beta' & x \text{ en } y \\ \beta \text{ en } \alpha & \beta' \text{ en } \alpha' & y \text{ en } x \end{array}$$

Mais dans ce changement de coordonnées, le trièdre Oxyz n'étant plus direct, le vecteur de Poynting  $\vec{E}_\Lambda \vec{H}$  change de sens ; pour respecter la direction de propagation choisie, il faut donc que les composantes de l'un des vecteurs  $\vec{E}$  ou  $\vec{H}$ , par exemple  $\vec{H}$ , soient opposées.

Ceci nous amène à remplacer  $H_0$  par  $-H_0$

On trouve alors pour les composantes cherchées :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = E_0 \cos \alpha' x \sin \beta' y e^{j(\omega t - \gamma' z)} \\ E_y = \frac{K\gamma Z}{K^2 - \alpha^2} H_0 \sin \alpha x \cos \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)} \\ \quad - \frac{\alpha' \beta'}{K^2 - \alpha'^2} E_0 \sin \alpha' x \cos \beta' y e^{j(\omega t - \gamma' z)} \\ E_z = \frac{jKZ\beta}{K^2 - \alpha^2} H_0 \sin \alpha x \sin \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)} \\ \quad + \frac{j\gamma' \alpha'}{K^2 - \alpha'^2} E_0 \sin \alpha' x \sin \beta' y e^{j(\omega t - \gamma' z)} \\ H_x = -H_0 \sin \alpha x \cos \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)} \\ H_y = \frac{\alpha \beta}{K^2 - \alpha^2} H_0 \cos \alpha x \sin \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)} \\ \quad + \frac{K\gamma'}{Z(K^2 - \alpha'^2)} E_0 \cos \alpha' x \sin \beta' y e^{j(\omega t - \gamma' z)} \\ H_z = \frac{j\alpha \gamma}{K^2 - \alpha^2} H_0 \cos \alpha x \cos \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)} \\ \quad - \frac{jK\beta'}{Z(K^2 - \alpha'^2)} E_0 \cos \alpha' x \cos \beta' y e^{j(\omega t - \gamma' z)} \end{array} \right.$$



tandis que les différents paramètres sont liés par les relations :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = K^2$$

$$\text{et } \frac{\epsilon'}{\epsilon} \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = K'^2$$

qui montrent que dans ce cas également il existe deux ondes se propageant avec des vitesses différentes.

### C) Axe optique suivant Oz

La permittivité est alors représentée par la matrice :

$$\begin{vmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon' \end{vmatrix}$$

et les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\text{Rot } \vec{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -j \omega \mu H_x = -j K Z H_x \\ (\text{Rot } \vec{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j \omega \mu H_y = -j K Z H_y \\ (\text{Rot } \vec{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j \omega \mu H_z = -j K Z H_z \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\text{Rot } \vec{H})_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j \omega D_x = j \omega \epsilon E_x = \frac{j K}{Z} E_x \\ (\text{Rot } \vec{H})_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j \omega D_y = j \omega \epsilon E_y = \frac{j K}{Z} E_y \\ (\text{Rot } \vec{H})_z = \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} = j \omega D_z = j \omega \epsilon' E_z = \frac{j K'}{Z'} E_z \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

Les composantes  $E_z$  et  $H_z$  sont solutions des équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\epsilon}{\epsilon'} \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + K'^2 E_z = 0 \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + K^2 H_z = 0 \end{array} \right.$$



dont la résolution s'effectue en utilisant la même méthode que dans les cas précédents. Les autres composantes sont déterminées par éliminations successives dans les équations initiales.

Avec les mêmes paramètres que précédemment et compte tenu des conditions aux limites, on obtient comme résultats :

$$\left\{ \begin{aligned} E_x &= \frac{j\beta K Z}{K^2 - \gamma^2} H_0 \cos \alpha x \sin \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)} \\ &\quad - \frac{j\alpha' \gamma'}{K^2 - \gamma'^2} E_0 \cos \alpha' x \sin \beta' y e^{j(\omega t - \gamma' z)} \\ E_y &= \frac{-j\alpha K Z}{K^2 - \gamma^2} H_0 \sin \alpha x \cos \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)} \\ &\quad - \frac{j\beta' \gamma'}{K^2 - \gamma'^2} E_0 \sin \alpha' x \cos \beta' y e^{j(\omega t - \gamma' z)} \\ E_z &= E_0 \sin \alpha' x \sin \beta' y e^{j(\omega t - \gamma' z)} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} H_x &= \frac{j\alpha \gamma}{K^2 - \gamma^2} H_0 \sin \alpha x \cos \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)} \\ &\quad + \frac{j\beta' K}{Z(K^2 - \gamma'^2)} E_0 \sin \alpha' x \cos \beta' y e^{j(\omega t - \gamma' z)} \\ H_y &= \frac{j\beta \gamma}{K^2 - \gamma^2} H_0 \cos \alpha x \sin \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)} \\ &\quad - \frac{j\alpha' K}{Z(K^2 - \gamma'^2)} E_0 \cos \alpha' x \sin \beta' y e^{j(\omega t - \gamma' z)} \\ H_z &= H_0 \cos \alpha x \cos \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)} \end{aligned} \right.$$

complétés par les relations :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = K^2$$

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \frac{\epsilon'}{\epsilon} \gamma'^2 = K'^2.$$

Ces équations montrent l'existence de deux vibrations de même pulsation et nous allons examiner les modes fondamentaux correspondant à chacune de ces deux ondes. Pour la vibration se propageant avec la constante de propagation  $\gamma$ , les deux modes  $TE_{01}$  et  $TE_{10}$  existent. Pour l'onde possédant la constante  $\gamma'$ , il en est de même (modes  $(TE_{10})'$  et  $(TE_{01})'$ ).

L'anisotropie des échantillons étant toujours faible, il est donc impossible d'éviter l'existence simultanée des modes  $TE_{01}$  et  $(TE_{01})'$





d'une part, et des modes  $TE_{10}$  et  $(TE_{10})$ , d'autre part. Dans ces conditions, il n'est donc pas possible d'avoir uniquement la propagation de deux ondes orthogonales possédant des vitesses différentes, ce qui exclut l'observation de phénomènes polarimétriques.

#### D) Conclusion

-----

Les résultats théoriques que nous venons d'exposer montrent que dans un guide rectangulaire rempli d'une substance uniaxe il peut exister deux ondes de même pulsation se propageant avec des vitesses différentes. Ceci se produit non seulement lorsque l'axe optique est parallèle à un des deux axes de coordonnées perpendiculaires à la direction de propagation, mais aussi, contrairement à l'optique classique, lorsque l'axe optique est parallèle à la direction de propagation.

Dans le premier cas, pour les modes fondamentaux, les deux vibrations sont orthogonales et possèdent la même structure ; ce qui explique les phénomènes de polarimétrie analogues à ceux observés en optique cristalline.

Par contre, dans le second cas, les ondes existantes ne sont pas à la fois orthogonales et douées de la même structure ; c'est pourquoi on n'observe aucun phénomène polarimétrique.

## II - CAS D'UNE SUBSTANCE BIAXE

Nous supposons maintenant que le guide est rempli d'une substance biaxe sous la forme d'une lame taillée de façon à ce que les directions correspondant aux permittivités principales soient les axes de coordonnées.

Dans ces conditions, la permittivité est représentée par la matrice :

$$\begin{vmatrix} \epsilon' & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{vmatrix}$$

qui permet d'écrire les équations de Maxwell sous la forme développée,  $\omega$  étant la pulsation de la vibration sinusoïdale étudiée.

./...



$$\left\{ \begin{aligned} (\text{Rot } \vec{E})_x &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -j \omega \mu H_x \\ (\text{Rot } \vec{E})_y &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j \omega \mu H_y \\ (\text{Rot } \vec{E})_z &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j \omega \mu H_z \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} (\text{Rot } \vec{H})_x &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j \omega \epsilon' E_x \\ (\text{Rot } \vec{H})_y &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j \omega \epsilon E_y \\ (\text{Rot } \vec{H})_z &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j \omega \epsilon_z E_z \end{aligned} \right.$$

Aucune coordonnée ne jouant un rôle prépondérant, nous éliminons toutes les composantes autres que  $E_z$  et  $H_z$ . On obtient ainsi le système de deux équations :

$$\left\{ \begin{aligned} (E) \quad & \omega \left( \frac{\epsilon'}{\omega^2 \mu \epsilon' - \gamma^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\epsilon}{\omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \epsilon_z E_z \right) \\ & + \gamma \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial y} \left( \frac{1}{\omega^2 \mu \epsilon' - \gamma^2} - \frac{1}{\omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2} \right) = 0 \\ (H) \quad & \omega \mu \left( \frac{1}{\omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{1}{\omega^2 \mu \epsilon' - \gamma^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + H_z \right) \\ & + \gamma \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial y} \left( \frac{1}{\omega^2 \mu \epsilon' - \gamma^2} - \frac{1}{\omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2} \right) = 0 \end{aligned} \right.$$

dans lesquelles  $\gamma$  représente la constante de propagation de l'onde.

Elles peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} & \omega \left( \frac{\epsilon'}{\omega^2 \mu \epsilon' - \gamma^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\epsilon}{\omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \epsilon_z \right) E_z \\ & + \gamma \left( \frac{1}{\omega^2 \mu \epsilon' - \gamma^2} - \frac{1}{\omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H_z = 0 \\ & \gamma \left( \frac{1}{\omega^2 \mu \epsilon' - \gamma^2} - \frac{1}{\omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} E_z \\ & + \omega \mu \left( \frac{1}{\omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{\omega^2 \mu \epsilon' - \gamma^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 1 \right) H_z = 0 \end{aligned}$$





d'où l'on déduit que  $E_z$  et  $H_z$  sont les solutions de l'équation (1) :

$$\begin{aligned} & \left( \epsilon' \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \epsilon \frac{\partial^4}{\partial y^4} + (\epsilon' + \epsilon) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + (\epsilon' (\omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2) + \epsilon_z (\omega^2 \mu \epsilon' - \gamma^2)) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right. \\ & \left. + (\epsilon (\omega^2 \mu \epsilon' - \gamma^2) + \epsilon_z (\omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2)) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \epsilon_z (\omega^2 \mu \epsilon' - \gamma^2) (\omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2) \right) \frac{E_z}{H_z} = 0 \end{aligned}$$

Les équations (E) et (H) sont des équations ne comportant que des dérivées du 2ème ordre, et leur forme rappelle celle de l'équation de Laplace à laquelle on aurait ajouté un second membre.

Il est donc logique de supposer que les solutions de  $E_z$  et  $H_z$  sont des produits de fonctions sinusoïdales en  $x$  et  $y$  par le terme de propagation  $e^{j(\omega t - \gamma z)}$ .

Les conditions aux limites exigent que  $E_z$  soit nul pour  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$  et  $y = b$ , ce qui conduit à écrire  $E_z$  sous la forme :

$$E_z = E_0 \sin \alpha x. \sin \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)}$$

en posant :

$$\alpha = \frac{m\pi}{a} \text{ et } \beta = \frac{n\pi}{b}$$

Pour pouvoir vérifier les équations (E) et (H), en particulier (E), il est nécessaire que  $\frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial y}$  ait la même forme que  $E_z$ , ce qui donne :

$$H_z = H_0 \cos \alpha x. \cos \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)}$$

Vérifions maintenant l'équation (1).

Elle devient, en posant  $\Gamma = \gamma^2$ ,  $K^2 = \omega^2 \mu \epsilon$  et  $K'^2 = \omega^2 \mu \epsilon'$

$$\epsilon_z \Gamma^2 + ((\epsilon' \alpha^2 + \epsilon \beta^2 + \epsilon (\alpha^2 + \beta^2 - K^2 - K'^2)) \Gamma + \epsilon_z (K^2 K'^2 - \alpha^2 K'^2 - \beta^2 K^2))$$

$$- \epsilon' \alpha^2 K'^2 - \epsilon \beta^2 K'^2 + (\epsilon' \alpha^2 + \epsilon \beta^2) (\alpha^2 + \beta^2) = 0$$

Equation qui a pour solutions :

$$\Gamma = \gamma^2 = - \frac{(\epsilon' \alpha^2 + \epsilon \beta^2 + \epsilon (\alpha^2 + \beta^2 - K^2 - K'^2)) \pm \sqrt{\Delta}}{2 \epsilon_z} \quad (2)$$



avec :

$$\Delta = (\epsilon' \alpha^2 + \epsilon \beta^2 + \epsilon(\alpha^2 + \beta^2 - K^2 - K'^2))^2 - 4\epsilon_z (\epsilon_z (K^2 K'^2 - \alpha^2 K'^2 - \beta^2 K^2) - \epsilon' \alpha^2 K^2 - \epsilon \beta^2 K'^2 + (\epsilon' \alpha^2 + \epsilon \beta^2) (\alpha^2 + \beta^2))$$

Une onde incidente de pulsation  $\omega$  peut donc se propager avec deux vitesses de phase différentes. On obtient la propagation simultanée de deux modes dont les composantes du champ électromagnétique  $E_z$  et  $H_z$  sont données par les relations indiquées précédemment, en utilisant les deux valeurs  $\gamma$  et  $\gamma'$  de la constante de propagation que nous venons de calculer. Chacune de ces ondes n'est définie que par un seul paramètre, par exemple  $E_0$  (ou  $E'_0$ ) et nous allons donc exprimer  $H_0$  (ou  $H'_0$ ) en fonction de  $E_0$ .

On peut calculer la relation liant  $H_0$  à  $E_0$ , soit à l'aide de (H) soit à l'aide de (E) ; on obtient les deux expressions différentes ci-après, qui ont cependant la même valeur car le système des équations (E) et (H) est un système de Cramer dont le déterminant est nul.

$$H_0 = \frac{\omega \left( \frac{\epsilon'}{\omega^2 \mu \epsilon' - \gamma^2} \alpha^2 + \frac{\epsilon}{\omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2} \beta^2 \right) E_0}{\gamma \alpha \beta \left( \frac{1}{\omega^2 \mu \epsilon' - \gamma^2} - \frac{1}{\omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2} \right)} \quad (3)$$

$$H_0 = \frac{\gamma \alpha \beta \left( \frac{1}{\omega^2 \mu \epsilon' - \gamma^2} - \frac{1}{\omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2} \right) E_0}{\omega \mu \left( \frac{1}{\omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2} \alpha^2 + \frac{1}{\omega^2 \mu \epsilon' - \gamma^2} \beta^2 \right)}$$

Pour finir de déterminer chacune des ondes qui peuvent se propager, nous allons expliciter successivement les expressions de  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $H_x$ ,  $H_y$  à l'aide des relations suivantes déduites des équations primitives :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon' E_x = \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z} - j \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon E_y = \frac{\partial^2 E_z}{\partial y \partial z} + j \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x}$$



$$H_x = -\frac{1}{j\omega\mu} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right)$$

$$H_y = -\frac{1}{j\omega\mu} \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)$$

Pour les mêmes raisons que celles exposées dans le cas d'une substance uniaxe, seules les solutions particulières de ces équations sont à retenir. On obtient finalement les résultats suivants :

$$E_x = j \frac{\alpha E_0 \gamma - H_0 \beta \omega \mu}{\gamma^2 - \omega^2 \mu \epsilon'} \cos \alpha x \sin \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)}$$

$$E_y = j \frac{\beta E_0 \gamma + H_0 \alpha \omega \mu}{\gamma^2 - \omega^2 \mu \epsilon'} \sin \alpha x \cos \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)}$$

$$H_x = -\frac{1}{j\omega\mu} \left( E_0 \beta - \frac{\gamma(\gamma E_0 \beta + H_0 \alpha \omega \mu)}{\gamma^2 - \omega^2 \mu \epsilon'} \right) \sin \alpha x \cos \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)}$$

$$H_y = \frac{1}{j\omega\mu} \left( E_0 \alpha - \frac{\gamma(\gamma E_0 \alpha - H_0 \beta \omega \mu)}{\gamma^2 - \omega^2 \mu \epsilon'} \right) \cos \alpha x \sin \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)}$$

Ces expressions complétées par les relations (2) et (3) et celles donnant :

$$E_z = E_0 \sin \alpha x \sin \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)}$$

$$H_z = H_0 \cos \alpha x \cos \beta y e^{j(\omega t - \gamma z)}$$

déterminent complètement l'onde se propageant avec la constante de propagation  $\gamma$ . Des expressions analogues obtenues en remplaçant  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $E_0$  et  $H_0$  par  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ ,  $E'_0$  et  $H'_0$  détermineraient la 2<sup>ème</sup> onde se propageant avec la constante de propagation  $\gamma'$ .

Le calcul qui précède montre que dans le cas où une substance biaxe remplit le guide, il existe **deux modes de propagation** pour une onde incidente de **pulsation**  $\omega$ . Ces modes ont même structure, mais possèdent des vitesses de phase différentes.

Examinons le cas des modes fondamentaux. On constate facilement sur les composantes du champ électromagnétique qu'il s'agit de modes  $TE_{01}$  existant simultanément pour chacune des ondes considérées. On constate donc, qu'à une onde incidente de pulsation  $\omega$  donnée, correspond deux modes  $TE_{01}$ , l'un ayant pour constante  $\gamma$ , l'autre  $\gamma'$ , ainsi que deux modes analogues  $TE_{10}$ . La superposition de ces quatre modes ne permet donc pas d'envisager l'observation de phénomènes polarimétriques comme en optique classique. En effet, si nous appelons  $E_1$  et  $E_2$  les amplitudes





initiales des composantes  $E_x$  et  $E_y$ , le champ électromagnétique total est donné par les six expressions :

$$E_x = E_1 \sin \beta y (e^{j(\omega t - \gamma z)} + e^{j(\omega t - \gamma' z)})$$

$$E_y = E_2 \sin \alpha x (e^{j(\omega t - \gamma z)} + e^{j(\omega t - \gamma' z)})$$

$$E_z = 0$$

$$H_x = -\frac{1}{\omega \mu} E_2 \sin \alpha x (\gamma e^{j(\omega t - \gamma z)} + \gamma' e^{j(\omega t - \gamma' z)})$$

$$H_y = \frac{1}{\omega \mu} E_1 \sin \beta y (\gamma e^{j(\omega t - \gamma z)} + \gamma' e^{j(\omega t - \gamma' z)})$$

$$\begin{aligned} H_z = & -j \frac{\omega \epsilon'}{\beta} E_1 \cos \beta y (e^{j(\omega t - \gamma z)} + e^{j(\omega t - \gamma' z)}) \\ & + \frac{j E_1}{\beta \omega \mu} \cos \beta y (\gamma^2 e^{j(\omega t - \gamma z)} + \gamma'^2 e^{j(\omega t - \gamma' z)}) \\ & + \frac{j E_2 \omega \epsilon}{\alpha} \cos \alpha x (e^{j(\omega t - \gamma z)} + e^{j(\omega t - \gamma' z)}) \\ & - \frac{j E_2}{\alpha \omega \mu} \cos \alpha x (\gamma^2 e^{j(\omega t - \gamma z)} + \gamma'^2 e^{j(\omega t - \gamma' z)}). \end{aligned}$$

On voit facilement, en considérant les composantes du champ électrique, que l'onde résultante obtenue à la sortie du guide porte-échantillon n'est pas affectée par des modifications de structure entraînant des phénomènes polarimétriques.

Par contre, l'amplitude de l'onde résultante est fonction de l'écart de phase présenté par les deux composantes après avoir traversé la lame. Ce déphasage peut s'écrire sous la forme :  $\Delta \varphi = 2\pi \lambda \left( \frac{1}{\lambda g} - \frac{1}{\lambda g'} \right)$ , il est clair qu'en faisant varier la fréquence de l'onde ou la longueur de l'échantillon on peut obtenir un déphasage pouvant prendre n'importe quelle valeur comprise entre 0 et  $2k\pi$ . S'il est égal à  $2k\pi$  l'onde résultante a une amplitude maximale, alors qu'elle est nulle pour  $\Delta = (2k + 1)\pi$ . On peut concevoir le phénomène comme un phénomène d'interférence longitudinale.

### III - CONCLUSION

Les calculs précédents montrent qu'il existe toujours deux vitesses de propagation pour une onde de pulsation donnée, lorsqu'elle traverse une section de guide rectangulaire rempli d'un milieu anisotrope.



Ce fait est différent de ce qui se passe en optique classique où l'on n'observe qu'une seule vitesse de propagation dans le cas d'une lame taillée perpendiculairement à l'axe. Cependant, des phénomènes polarimétriques ne peuvent apparaître que si l'échantillon étudié est un cristal uniaxe dont l'axe optique est parallèle à l'un des côtés du guide et, contrairement à l'optique classique, aucune perturbation structurale de l'onde ne se produit si le cristal est biaxe : ce qui revient à dire qu'une telle anisotropie n'est pas justiciable des méthodes de polarimétrie ultrahertzienne qui donnent, comme nous le verrons plus loin, des résultats expérimentaux intéressants pour des échantillons uniaxes.

-----



## CHAPITRE V

=====

### ETUDE DE LA PROPAGATION D'UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE DANS UN GUIDE CYLINDRIQUE REMPLI D'UNE SUBSTANCE ANISOTROPE

Précédemment, nous avons étudié la propagation d'une onde dans un guide de section rectangulaire rempli d'une substance anisotrope. Le but de cette étude était de rechercher la nature des vibrations transmises et surtout d'en déterminer les vitesses de phase. Nous allons donc maintenant procéder à une étude analogue lorsqu'on utilise un guide cylindrique (52 - 53).

#### I - RAPPEL RELATIF AUX EQUATIONS DE MAXWELL EN COORDONNEES

##### CYLINDRIQUES

La nécessité d'utiliser un système de coordonnées indépendantes, permettant d'exprimer simplement les conditions aux limites sur la paroi du guide, oblige de choisir un système de coordonnées cylindriques  $(\rho, \varphi, z)$ . Dans un tel système les équations de Maxwell

$$\text{Rot } \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\text{Rot } \vec{H} = \frac{d\vec{D}}{dt}$$

prennent la forme :

$$\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \rho \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = - \frac{dB_\rho}{dt}$$

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = - \frac{dB_\varphi}{dt}$$

$$\frac{\partial \rho E_\varphi}{\partial \rho} - \frac{\partial E_\rho}{\partial \varphi} = - \frac{dB_z}{dt}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \rho \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = \frac{dD_\rho}{dt}$$

$$\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = \frac{dD_\varphi}{dt}$$

$$\frac{\partial \rho H_\varphi}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} = \frac{dD_z}{dt}$$





Ces équations relatives à un milieu non chargé peuvent être complétées par les deux autres relations :

$$\vec{\text{div}} \vec{B} = 0$$

$$\vec{\text{div}} \vec{D} = 0$$

## II - PERMITTIVITE D'UNE SUBSTANCE ANISOTROPE EN COORDONNEES CYLINDRIQUES

L'anisotropie d'une substance est liée à une représentation matricielle de la permittivité ou de la perméabilité. Cette dernière, lorsqu'elle est anisotrope, permet d'expliquer les phénomènes magnéto-optiques (effet Faraday et effet Cotton-Mouton) bien étudiés par de nombreux auteurs. En raison des applications industrielles (isolateurs et modulateurs à ferrite) les études théoriques ont été principalement faites dans le cas de l'effet Faraday en coordonnées rectangulaires ou cylindriques et pour l'effet Cotton-Mouton en coordonnées rectangulaires.

Notre but étant principalement l'étude de corps uniaxes ou biaxes, suivant la définition de l'optique classique, la perméabilité est un scalaire, alors que la permittivité présente en coordonnées cartésiennes la forme bien connue :

$$\begin{vmatrix} \epsilon' & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{vmatrix}$$

correspondant, soit à une substance uniaxe ( $\epsilon = \epsilon_z$  ou  $\epsilon = \epsilon'$ ) dont l'axe est perpendiculaire ou parallèle à la direction de propagation, soit à un échantillon biaxe dont une des directions principales de la permittivité (non confondue avec les axes optiques) est parallèle à la direction de propagation.

Le système de coordonnées  $(\rho, \varphi, z)$  se déduit du système  $(x, y, z)$  par une rotation d'angle  $\varphi = (\vec{Ox}, \vec{\rho})$ .

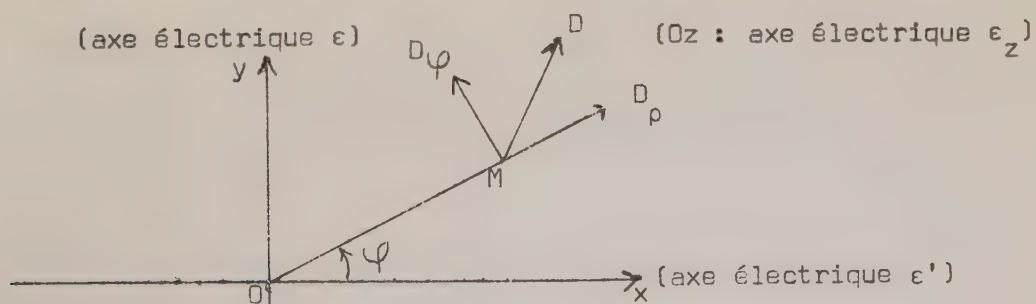


Fig. V - 1



La permittivité prend alors la représentation matricielle :

$$\begin{vmatrix} \epsilon \sin^2 \varphi + \epsilon' \cos^2 \varphi & (\epsilon - \epsilon') \sin \varphi \cos \varphi & 0 \\ (\epsilon - \epsilon') \sin \varphi \cos \varphi & \epsilon' \sin^2 \varphi + \epsilon \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{vmatrix}$$

ou en posant  $\eta = \epsilon - \epsilon'$

$$\begin{vmatrix} \epsilon' + \eta \sin^2 \varphi & \eta \sin \varphi \cos \varphi & 0 \\ \eta \sin \varphi \cos \varphi & \epsilon' + \eta \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{vmatrix}$$

### III - TRANSFORMATION DU SYSTEME COMPLET DES EQUATIONS DE MAXWELL EN UN SYSTEME A DEUX INCONNUES

Nous supposons que l'onde étudiée est sinusoïdale et de pulsation  $\omega$ .

Par éliminations successives des composantes transversales des champs, on obtient le système à deux inconnues porté sur la planche n° I .

Nous donnons en annexe le détail de ce calcul, ainsi que la forme simplifiée des équations correspondant à un milieu uniaxe ( $\epsilon = \epsilon_z$ ).

Ce système d'équations n'est pas linéaire et les opérateurs qui y interviennent ne sont pas commutatifs ; les méthodes de résolution classique ne peuvent par suite être employées.

### IV - RECHERCHE DES SOLUTIONS DE $E_z$ ET $H_z$

Comme il n'est pas possible de trouver une solution générale, nous allons nous placer dans deux cas particuliers. Pour cela, nous rechercherons les expressions de  $E_z$  et  $H_z$  pour les points situés sur les lignes neutres de la lame cristalline étudiée.

Expérimentalement, la section de guide contenant la substance cristalline est précédée et suivie par des éléments de guide vide où se propage un seul mode, dans notre cas, le mode fondamental TE<sub>11</sub>.

*[Faint handwritten notes at the bottom of the page]*

$$f(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \quad \text{for } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f(0) = 0.$$

$$\text{I} \quad j \left\{ \frac{\epsilon_3 \epsilon'}{\epsilon} (\omega^2 \epsilon'^2 \mu^2 + \frac{\epsilon + \epsilon'}{\epsilon} \omega^2 \epsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\epsilon}{\epsilon'} \frac{\partial^4}{\partial z^4}) + \eta \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ \sin^2 \varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \frac{\partial}{\partial \rho}) + \frac{1}{\rho^2} \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\sin 2\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}) + \cos 2\varphi \right] \right\} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\rho} \sin 2\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\} + \epsilon' \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \epsilon \mu \right) \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}) \right] \left\{ E_3 - \omega \mu \eta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2} \sin 2\varphi \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}) \right] \right.$$

$$\left. + \cos 2\varphi \left( \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \right) - \sin 2\varphi \frac{\partial}{\partial \rho} \right] H_3 = 0$$

$$\text{II} \quad j \left\{ \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon' \right) \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \frac{\partial}{\partial \rho}) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon' \right] + \omega^2 \mu \eta \left\{ \sin^2 \varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \frac{\partial}{\partial \rho}) + \cos^2 \varphi \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right. \right.$$

$$\left. + \omega^2 \mu \epsilon' + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\sin 2\varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \cos 2\varphi) - \frac{1}{\rho} \sin 2\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \right\} H_3 - \eta \omega \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{2} \sin 2\varphi \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \frac{\partial}{\partial \rho}) \right. \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] + \cos 2\varphi \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \right) - \sin 2\varphi \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ E_3 = 0 \right.$$





Dans cette hypothèse, la continuité des composantes normales de  $\vec{B}$  et  $\vec{D}$  implique qu'à un mode incident transversal correspond obligatoirement un mode également transverse dans la lame cristalline. Ceci est d'ailleurs conforme à la théorie de Goubau qui démontre qu'il n'y a pas transformation de mode lorsqu'un guide contient une lame diélectrique isotrope.

Donc, comme à l'extérieur de la section contenant le milieu anisotrope, seules peuvent se propager des ondes TE ou TM, les modes existant dans la lame cristalline seront eux aussi TE ou TM. Bien qu'on puisse penser qu'il peut exister des modes comportant des composantes normales à la fois pour le champ électrique et le champ magnétique, l'étude des modes TE ou TM est suffisante, puisque seul un de ces derniers, correspondant au mode incident, peut se propager. Dans notre montage, le mode incident est le mode fondamental  $TE_{11}$  et l'onde qui se propagera dans la substance anisotrope sera donc TE.

Cette étude limitée à la recherche des expressions des champs  $E_z$  ou  $H_z$  suivant les lignes neutres du cristal est destinée à mettre en évidence les différentes vibrations pouvant se propager, et à en déterminer les longueurs d'onde apparentes ou guidées. Ce sont ces dernières qui nous intéressent, et il n'est donc pas gênant d'ignorer la configuration exacte des lignes de champ de chaque onde.

#### V - PROPAGATION DES MODES TE DANS UN GUIDE CYLINDRIQUE CONTENANT UNE LAME TAILLEE PARALLELEMENT A L'AXE

Nous étudierons seulement le cas des ondes progressives, en supposant que la lame est très épaisse ou que l'on a rendu négligeable le phénomène de réflexion sur les dioptries d'entrée et de sortie.

##### A) Etude des modes se propageant dans $xOz$ ( $\psi = 0$ )

Le système d'équations I et II prend alors la forme :

$$\left\{ \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon' \right) \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon' \right) \right. \\ \left. + \omega^2 \mu n \left( \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon' + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right\} H_z = 0$$

II

./...

REPORT OF THE

COMMISSIONER OF THE

LAND OFFICE, IN RESPONSE TO A RESOLUTION OF THE

BOARD OF LAND COMMISSIONERS, PASSED AT A MEETING

Held at the City of New York, on the 10th day of

January, 1900, in relation to the

Report of the Commissioner of the Land Office, in

response to a resolution of the Board of Land

Commissioners, passed at a meeting held at the

City of New York, on the 10th day of January,

1900, in relation to the Report of the

Commissioner of the Land Office, in response to a

resolution of the Board of Land Commissioners,

passed at a meeting held at the City of New York,

on the 10th day of January, 1900, in relation to

the Report of the Commissioner of the Land Office,

in response to a resolution of the Board of Land

Commissioners, passed at a meeting held at the

City of New York, on the 10th day of January,

1900, in relation to the Report of the

Commissioner of the Land Office, in response to a

resolution of the Board of Land Commissioners,

passed at a meeting held at the City of New York,

on the 10th day of January, 1900, in relation to

the Report of the Commissioner of the Land Office,

in response to a resolution of the Board of Land

Commissioners, passed at a meeting held at the

City of New York, on the 10th day of January,

1900, in relation to the Report of the

Commissioner of the Land Office, in response to a

resolution of the Board of Land Commissioners,

passed at a meeting held at the City of New York,

$$I \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \right) H_z = 0$$

Comme lors de l'étude des guides vides, nous allons rechercher les solutions de  $H_z$  en posant :

$$H_z = H_0 R(\rho) \cdot \phi(\varphi) \cdot e^{j(\omega t - \gamma z)}$$

En supposant  $\omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2 \neq 0$ , ce que les résultats confirment, l'équation II prend la forme :

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\omega^2 \mu \epsilon' - \gamma^2}{\omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \omega^2 \mu \epsilon' - \gamma^2 \right) H_z = 0$$

ou en posant  $A^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2$

$$A'^2 = \omega^2 \mu \epsilon' - \gamma^2$$

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{A'^2}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + A'^2 \right) H_z = 0$$

qui peut s'écrire :

$$\frac{1}{\rho} \phi(\varphi) \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \frac{A'^2}{A^2} \phi(\varphi) \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} R(\rho) \frac{d^2 \phi(\varphi)}{d\varphi^2} + A'^2 R(\rho) \phi(\varphi) = 0$$

ou :

$$\frac{1}{\rho} \frac{1}{R(\rho)} \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \frac{A'^2}{A^2} \frac{1}{R(\rho)} \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{1}{\phi(\varphi)} \frac{d^2 \phi(\varphi)}{d\varphi^2} + A'^2 = 0$$

posons  $\frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -n^2$ , en remarquant que la périodicité de  $2\pi$  présentée par  $H_z$  impose à  $n$  d'être un entier ; ce qui donne :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \frac{A'^2}{A^2} \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \left( A'^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0$$

Faisons le changement de variable  $R(\rho) = \rho^\alpha \cdot u$ . Si l'on pose  $2\alpha + \frac{A^2}{A'^2} = 1$ , l'équation s'écrit :

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} + \left( A^2 - \frac{\alpha^2 + n^2(1 - 2\alpha)}{\rho^2} \right) u = 0$$

Introduisons la nouvelle variable  $r = A\rho$

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \left( 1 - \frac{\alpha^2 + n^2(1 - 2\alpha)}{r^2} \right) u = 0$$



On constate que cette équation est une équation de Bessel dont la solution est :

$$u = BJ \sqrt{\alpha^2 + n^2 (1 - 2\alpha)} (A\rho) + CY \sqrt{\alpha^2 + n^2 (1 - 2\alpha)} (A\rho)$$

ce qui donne :

$$R(\rho) = \rho^\alpha \left( BJ \sqrt{\alpha^2 + n^2 (1 - 2\alpha)} (A\rho) + CY \sqrt{\alpha^2 + n^2 (1 - 2\alpha)} (A\rho) \right)$$

avec :  $\alpha = -\frac{\omega^2 \mu \eta}{2A'^2}$

L'équation I sera identiquement vérifiée si l'un des facteurs qui la composent est identiquement nul. Parmi ces termes, seuls ceux correspondant à l'application à  $H_z$  de l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial \varphi}$  peuvent être identiquement nuls afin d'éviter une solution triviale ( $\gamma = 0$ ). Ceci revient à écrire  $(\Phi')_{\varphi=0} = 0$ . D'autre part, nous devons également avoir  $\Phi'' = -n^2 \Phi$ . Cette double condition n'autorise comme solution de  $\Phi$  au voisinage de  $\varphi = 0$  qu'une expression  $(\Phi)_{\varphi=0} = \cos n\varphi$ .

Pour le mode TE envisagé, la solution de  $H_z$  au voisinage de  $\varphi = 0$  est donc :

$$(H_z)_{\varphi=0} = H_0 \cdot \cos n\varphi \rho^\alpha J \sqrt{\alpha^2 + n^2 (1 - 2\alpha)} (A\rho) e^{j(\omega t - \gamma z)}$$

puisque les fonctions  $Y_v$  ne peuvent être prises en considération, car elles conduiraient à prendre pour  $H_z$  une valeur infinie au centre du guide.

Il est bon de noter que la solution que nous envisageons pour  $H_z$  ne devient jamais infinie. En effet, même pour  $\rho$  tendant vers l'infini,  $H_z$  garde une valeur finie, puisque le produit  $\rho^\alpha J_v (A\rho)$  tend vers une valeur limite finie.

Recherchons les conditions aux limites qui exigent qu'à la périphérie du guide ( $\rho = R$ ) les composantes  $E_\varphi$  et  $H_\rho$  soient nulles. Elles ont pour expressions :

$$\begin{aligned} (\omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2) H_\rho &= -j \gamma \frac{\partial}{\partial \rho} H_z \\ (\omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2) E_\varphi &= j \omega \mu \frac{\partial}{\partial \rho} H_z \end{aligned}$$





Les conditions aux limites seront vérifiées si l'on a :

$$\left( \frac{\partial}{\partial \rho} H_z \right)_{\rho = R} = 0$$

$$\text{c'est-à-dire } \left( \frac{J'_v}{J_v} \right)_{\rho = R} = - \frac{\alpha}{AR}$$

Nous allons limiter au premier ordre la suite de nos calculs.

Dans ces conditions, l'anisotropie de la substance étant toujours faible ( $\eta$  et  $\alpha$  petits) l'ordre des fonctions de Bessel utilisées est voisin d'un nombre entier et égal au premier ordre près à :

$$v \approx n(1 - \alpha)$$

D'où :

$$\frac{J'_v}{J_v} = \frac{J'_n + \frac{\partial}{\partial n} J'_n \, dn}{J_n + \frac{\partial}{\partial n} J_n \, dn}$$

ce qui permet d'écrire, en utilisant les formules de récurrence classiques

$$\frac{J'_v(z)}{J_v(z)} = \frac{v}{z} - \frac{J_{n+1}(z)}{J_n(z)} - \frac{\frac{\partial}{\partial n} J_{n+1} \, dn}{J_n} + \frac{J_{n+1} \frac{\partial}{\partial n} J_n \, dn}{J_n^2}$$

en posant  $z = A\rho$ .

En explicitant chaque terme nous arrivons à l'expression :

$$\begin{aligned} \frac{J'_v(z)}{J_v(z)} &= \frac{v}{z} - \frac{J_{n+1}(z)}{J_n(z)} - \frac{\alpha n}{J_n(z)} \left( \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!(r+n+1)!} \right. \\ &\cdot \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r+n+1} \right) \left( \frac{z}{2} \right)^{n+1+2r} \\ &- \frac{J_{n+1}(z)}{J_n(z)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!(r+n)!} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+r} \right) \left( \frac{z}{2} \right)^{n+2r} \end{aligned}$$

En égalant cette expression pour  $z = AR$  à  $-\frac{\alpha}{AR}$  on déterminerait la valeur de  $A$  et ainsi on expliciterait la relation de propagation :

$$\omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2 = A^2$$

que l'on peut écrire, si  $\vec{K}$  est le vecteur d'onde de la vibration considérée ( $|\vec{K}| = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$ )

$$K^2 - \gamma^2 = A^2.$$

La détermination de  $A$  à l'aide d'une machine à calculer numérique est cependant malaisée et nous allons considérer notre problème comme une perturbation de la propagation de l'onde lorsque le guide est rempli d'une substance isotrope de permittivité  $\epsilon$ . Dans ce cas, la relation de propagation bien connue s'écrit :  $K^2 - \gamma_0^2 = A_0^2$



où  $A_0$  est défini par :  $J'_n(A_0 R) = 0$ .

Si nous posons  $z_0 = A_0 R$ , nous pouvons remplacer  $z$  par son développement au voisinage de  $z_0$ ,

$$z = z_0 + dz_0.$$

ce qui conduit aux relations figurant sur la planche II.

Il est donc possible d'exprimer la constante de propagation  $\gamma$  en fonction de  $\gamma_0$ , constante relative au cas d'un guide rempli d'un milieu de permittivité  $\epsilon$  :

$$\gamma^2 - \gamma_0^2 = A_0^2 - A^2 \approx -2A_0 dA_0$$

ou, en introduisant les longueurs d'onde guidées  $\lambda_g$  et  $\lambda_{g0}$

$$\frac{1}{\lambda_g^2} - \frac{1}{\lambda_{g0}^2} \approx -\frac{A_0 dA_0}{2\pi^2}$$

Nous constatons donc qu'il existe une seule onde se propageant avec une amplitude non nulle dans le plan  $xOz$  avec la longueur d'onde guidée  $\lambda_g$  voisine de celle d'une onde de même pulsation dans le cas d'un guide rempli d'une substance isotrope de permittivité  $\epsilon$ . On peut même, en première approximation, ce qui a été fait au Laboratoire lors de l'étude de lames de quartz, admettre que la vibration se propage avec une constante de propagation égale à  $\gamma_0$ .

#### B) Etude des modes se propageant dans $yOz$ ( $\varphi = \frac{\pi}{2}$ )

Le système d'équations I et II prend la forme :

$$\left\{ \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon' \right) \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon' \right) \right. \\ \left. + \omega^2 \mu \eta \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon' - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right\} H_z = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{\partial}{\partial \rho} \right) H_z = 0$$

Comme lors de l'étude précédente, nous allons rechercher les solutions de  $H_z$  en posant :

$$H_z = H_0 R(\rho) \Phi(\varphi) e^{j(\omega t - \gamma' z)}$$



$$\frac{J'_v}{J_v} = \frac{v}{z_0 + dz_0} - \frac{J_{n+1}(z_0 + dz_0)}{J_n(z_0)} - \frac{\alpha_n}{J_n(z_0)} \left[ \sum_{r=0}^{\infty} C_{n+1}(z_0 + dz_0)^{n+1+2r} - \frac{J_{n+1}(z_0 + dz_0)}{J_n(z_0)} \sum_{r=0}^{\infty} C_n(z_0 + dz_0)^{n+2r} \right]$$

avec:  $C_n = \frac{(-1)^r}{r!(n+r)!} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+r} \right) \left( \frac{1}{2} \right)^{n+2r}$

ou:

$$\frac{J'_v}{J_v} = \frac{v}{z_0} \left( 1 - \frac{dz_0}{z_0} \right) - \frac{J_{n+1}(z_0)}{J_n(z_0)} - \frac{J'_{n+1}(z_0)}{J_n(z_0)} dz_0 - \frac{\alpha_n}{J_n(z_0)} \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} C_{n+1} z_0^{n+1+2r} \right.$$

$$\left. \left[ 1 + \frac{dz_0}{z_0} (n+1+2r) \right] - \left[ \frac{J_{n+1}(z_0)}{J_n(z_0)} + \frac{J'_{n+1}(z_0)}{J_n(z_0)} dz_0 \right] \left[ \sum_{r=0}^{\infty} C_n z_0^{n+2r} \left( 1 + \frac{dz_0}{z_0} (n+2r) \right) \right] \right\}$$

or:

$$\frac{J'_v}{J_v} = -\frac{\alpha}{z_0 + dz_0} = -\frac{\alpha}{z_0} + \frac{\alpha dz_0}{z_0^2}$$

D'où finalement:

$$\frac{v + \alpha}{z_0} + \frac{J_{n+1}(z_0)}{J_n(z_0)} - \frac{\alpha_n}{J_n(z_0)} \left[ \sum_{r=0}^{\infty} C_{n+1} z_0^{n+1+2r} - \frac{J_{n+1}(z_0)}{J_n(z_0)} \sum_{r=0}^{\infty} C_n z_0^{n+2r} \right]$$

$$+ R dA_0 \left\{ \frac{-v - \alpha}{z_0^2} - \frac{J'_{n+1}(z_0)}{J_n(z_0)} - \frac{\alpha_n}{J_n(z_0)} \left[ \sum_{r=0}^{\infty} C_{n+1} z_0^{n+2r} (n+1+2r) - \frac{J_{n+1}(z_0)}{J_n(z_0)} \right. \right.$$

$$\left. \sum_{r=0}^{\infty} C_n z_0^{n-1+2r} (n+2r) - \frac{J'_{n+1}(z_0)}{J_n(z_0)} \sum_{r=0}^{\infty} C_n z_0^{n+2r} \right] \} = 0$$





En supposant  $\omega^2 \mu \epsilon' - \gamma'^2 \neq 0$ , ce qui sera vérifié à posteriori, l'équation II prend la forme :

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\omega^2 \mu \epsilon' - \gamma'^2}{\omega^2 \mu \epsilon' - \gamma'^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \omega^2 \mu \epsilon' - \gamma'^2 \right) H_z = 0$$

en posant :  $A^2 = \omega^2 \mu \epsilon' - \gamma'^2$   
 $A'^2 = \omega^2 \mu \epsilon' - \gamma'^2$

elle devient :

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{A^2}{A'^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + A^2 \right) H_z = 0$$

Remarquons l'analogie avec le calcul précédent, les rôles de A et A' étant inversés.

Posons  $\frac{1}{\rho} \frac{d^2 \phi}{d \varphi^2} = -n'^2$ . La périodicité de  $2\pi$  présentée par  $H_z$  impose à  $n'$  d'être entier.

$$\frac{1}{\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \frac{A^2}{A'^2} \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \left( A^2 - \frac{n'^2}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0$$

Faisons le changement de variable  $R(\rho) = \rho^{\alpha'} u$ . Si l'on pose  $2\alpha' = 1 - \frac{A'^2}{A^2}$

on a :

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} + \left( A^2 - \frac{\alpha'^2 + n'^2(1 - 2\alpha')}{\rho^2} \right) u = 0$$

Introduisons maintenant la nouvelle variable  $r = A'\rho$  :

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \left( 1 - \frac{\alpha'^2 + n'^2(1 - 2\alpha')}{r^2} \right) u = 0$$

Cette équation est une équation de Bessel dont la solution est :

$$u = BJ \frac{(A'\rho)}{\sqrt{\alpha'^2 + n'^2(1 - 2\alpha')}} + CY \frac{(A'\rho)}{\sqrt{\alpha'^2 + n'^2(1 - 2\alpha')}}$$

d'où :

$$R(\rho) = \rho^{\frac{\omega^2 \mu \eta}{2A^2}} \left( BJ \frac{(A'\rho)}{\sqrt{\alpha'^2 + n'^2(1 - 2\alpha')}} + CY \frac{(A'\rho)}{\sqrt{\alpha'^2 + n'^2(1 - 2\alpha')}} \right)$$

Comme dans le calcul précédent, l'équation I sera identiquement vérifiée si  $(\Phi)' = 0$  avec  $\Phi'' = -n'^2 \Phi$ . Cette double condition  $\Phi = \frac{\pi}{2}$

n'autorise comme solution, au voisinage de  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , qu'une expression

$$\left( \Phi \right)_{\varphi = \frac{\pi}{2}} = \sin n' \varphi.$$



Pour le mode TE envisagé, la solution de  $H_z$  au voisinage de  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  est donc :

$$(H_z)_{\varphi = \frac{\pi}{2}} = H_0 \sin n' \varphi \rho^{\alpha'} J_{\frac{\alpha'^2 + n'^2(1 - 2\alpha')}{\alpha'^2}}(A' \rho) e^{j(\omega t - \gamma' z)}$$

puisque les fonctions  $Y_v$  ne peuvent être prises en considération, car elles conduiraient à prendre pour  $H_z$  une valeur infinie au centre du guide.

Les conditions aux limites sont identiques aux précédentes et conduisent à l'expression :

$$\left( \frac{J'_{v'}}{J_{v'}} \right)_{\rho = R} = - \frac{\alpha'}{A'R}$$

Le calcul se traite comme précédemment en introduisant la nouvelle variable  $z' = A'\rho$

$$\begin{aligned} \frac{J'_{v'}(z')}{J_{v'}(z')} &= \frac{v'}{z'} - \frac{J_{n'+1}(z')}{J_n(z')} \\ &- \frac{\alpha' n'}{J_n(z')} \left( \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! (r + n' + 1)!} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r + n' + 1} \right) \left( \frac{z'}{2} \right)^{n'+1+2r} \right. \\ &\left. - \frac{J_{n'+1}(z')}{J_n(z')} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! (r + n')!} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n' + r} \right) \left( \frac{z'}{2} \right)^{n'+2r} \right) \end{aligned}$$

En égalant cette expression pour  $z' = A'R$  à  $-\frac{\alpha'}{A'R}$  on déterminerait la valeur de  $A'$  et ainsi on expliciterait la relation de propagation :

$$\omega^2 \mu \epsilon' - \gamma'^2 = A'^2$$

que l'on peut écrire si  $\vec{K}'$  est le vecteur d'onde ( $|\vec{K}'| = \omega \sqrt{\mu \epsilon'}$ )

$$K'^2 - \gamma'^2 = A'^2.$$

Pour permettre un calcul plus aisé, nous considérons notre problème comme une perturbation du cas bien connu de la propagation guidée dans un milieu isotrope de permittivité  $\epsilon'$ . La relation de propagation s'écrit alors :

$$K'^2 - \gamma_o'^2 = A_o'^2$$

où  $A_o'$  est défini par  $J'_{n'}(A_o'R) = 0$ .

Si nous posons  $z'_o = A_o'R$  nous pouvons remplacer  $z'$  par son développement au voisinage de  $z'_o$

$$z' = z'_o + dz'_o$$



et exprimer  $A'$  sous la forme  $A' = A'_0 + dA'_0$

On obtient finalement le résultat donné sur la planche II.

Il est donc possible d'exprimer la constante de propagation  $\gamma'$  en fonction de  $\gamma'_0$ , constante relative au cas d'un guide rempli d'un milieu de permittivité  $\epsilon'$ .

$$\gamma'^2 - \gamma'_0{}^2 = A'_0{}^2 - A'^2 \approx -2 A'_0 dA'_0$$

Si l'on introduit les longueurs d'onde guidées, cette relation devient :

$$\frac{1}{\lambda'_g{}^2} - \frac{1}{\lambda'_0{}^2} \approx \frac{-A'_0 dA'_0}{2\pi^2}$$

Dans le plan  $yOz$  nous constatons donc qu'il n'existe qu'une seule onde se propageant avec la longueur d'onde guidée  $\lambda'_g$  très voisine de celle relative à un milieu isotrope de permittivité  $\epsilon'$ .

### C) Conclusion

L'étude précédente montre qu'il existe respectivement dans les plans  $xOz$  et  $yOz$  une vibration de même structure mais de vitesse différente.

Ces deux ondes étant orthogonales, nous sommes en présence de deux vibrations douées des mêmes propriétés que celles de l'optique cristalline classique.

Aussi donc, en excitant ces deux vibrations, nous obtiendrons à la sortie du guide contenant la lame cristalline une onde elliptique analogue à celle obtenue en polarimétrie lumineuse.

## VI - ETUDE DES MODES T M.

Si nous nous plaçons maintenant dans des conditions expérimentales telles que, dans le guide incident, seule une onde TM puisse se propager, la continuité des composantes  $E_z$  et  $D_z$  fait que l'onde transmise est également du type TM.

La propagation de cette onde est donc régie par les équations I et II qui se mettent sous la forme :

./...





$$\frac{V' + \alpha'}{z'_0} - \frac{J_{n'+1}(z'_0)}{J_{n'}(z'_0)} - \frac{\alpha' n'}{J_{n'}(z'_0)} \left[ \sum_{r=0}^{\infty} C_{n'+1} z'_0^{n'+2r+1} - \frac{J_{n'+1}(z'_0)}{J_{n'}(z'_0)} \sum C_{n'} z'_0^{n'+2r} \right]$$

$$+ R dA'_0 \left\{ \frac{-V' - \alpha'}{z'^2_0} - \frac{J'_{n'+1}(z'_0)}{J_{n'}(z'_0)} - \frac{\alpha' n'}{J_{n'}(z'_0)} \left[ \sum_{r=0}^{\infty} C_{n'+1} z'_0^{n'+2r} (n'+2r+1) \right. \right.$$

$$\left. - \frac{J_{n'+1}(z'_0)}{J_{n'}(z'_0)} \sum_{r=0}^{\infty} C_{n'} z'^{n'+2r-1}_0 (n'+2r) - \frac{J'_{n'+1}(z'_0)}{J_{n'}(z'_0)} \sum_{r=0}^{\infty} C_{n'} z'_0^{n'+2r} \right] \} = 0$$

Planche: III



$$\begin{aligned}
 & \left[ \epsilon' \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \epsilon \mu \right) \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \epsilon \mu \right) \right. \\
 \text{I} \quad & + \eta \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ \sin^2 \varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \cos^2 \varphi \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \epsilon \mu + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} (\sin 2\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \cos 2\varphi \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{\rho} \sin 2\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right\} E_z = 0 \\
 \text{II} \quad & \eta \omega \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{2} \sin 2\varphi \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \cos 2\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \right) \right. \\
 & \left. - \sin 2\varphi \frac{\partial}{\partial \rho} \right\} E_z = 0
 \end{aligned}$$

Pour rechercher la vitesse de propagation de chaque onde, nous allons résoudre ce système d'équations dans les deux cas particuliers :

$$\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

A) Etude des modes se propageant dans xOz ( $\varphi = 0$ )

---

L'étude de la propagation dans le plan xOz correspond au cas particulier  $\varphi = 0$ .

Le système d'équations prend la forme :

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon \right) \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon \right) \\
 \text{I} \quad & - \frac{\eta \gamma^2}{\epsilon'} \left( \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) E_z = 0 \\
 \text{II} \quad & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \right) E_z = 0
 \end{aligned}$$

Nous recherchons la solution de  $E_z$  sous la forme :

$$E_z = E_0 R(\rho) \phi(\varphi) e^{j(\omega t - \gamma z)}$$

En supposant  $\omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2 \neq 0$  et  $\omega^2 \mu \epsilon - \frac{\epsilon}{\epsilon'} \gamma^2 \neq 0$

l'équation I prend la forme :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2}{\omega^2 \mu \epsilon - \frac{\epsilon}{\epsilon'} \gamma^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2 E_z = 0$$

et en posant :  $B^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \frac{\epsilon}{\epsilon'} \gamma^2$

$$B'^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2.$$



elle s'écrit :

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{B'^2}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + B'^2 \right) E_z = 0$$

La résolution de cette équation est analogue à celle faite dans le cas précédent.

Posons  $\frac{1}{\rho} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -n^2$ , en remarquant que la périodicité de  $2\pi$  présentée par  $E_z$  impose à  $n$  d'être entier.

On a :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \frac{B'^2}{B^2} \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \left( B'^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0$$

Faisons le changement de variable  $R(\rho) = \rho^\beta u$ . Si l'on pose :

$$2\beta + \frac{B^2}{B'^2} = 1, \text{ l'équation s'écrit :}$$

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} + \left( B^2 - \frac{\beta^2 + n^2(1 - 2\beta)}{\rho^2} \right) u = 0$$

et en introduisant la nouvelle variable  $r = B\rho$  :

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \left( 1 - \frac{\beta^2 + n^2(1 - 2\beta)}{r^2} \right) u = 0$$

On constate que cette équation est une équation de Bessel dont la solution est :

$$u = C J_{\sqrt{\beta^2 + n^2(1 - 2\beta)}}(B\rho) + D Y_{\sqrt{\beta^2 + n^2(1 - 2\beta)}}(B\rho)$$

ce qui donne :

$$R(\rho) = \rho^\beta \left( C J_{\sqrt{\beta^2 + n^2(1 - 2\beta)}}(B\rho) + D Y_{\sqrt{\beta^2 + n^2(1 - 2\beta)}}(B\rho) \right)$$

avec  $\beta = -\frac{\omega^2 \mu \eta}{2B'^2}$

L'équation II sera identiquement vérifiée si l'un des trois facteurs qui la composent est identiquement nul. Parmi ces termes, seuls ceux correspondant à l'application à  $H_z$  de l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial \varphi}$  peuvent être identiquement nuls, si l'on veut éviter une solution triviale ( $\gamma = 0$ ).

Ceci revient à écrire :  $(\Phi') = 0$   
 $\varphi = 0$





D'autre part, nous devons également avoir  $\Phi'' = -n^2 \Phi$ .

Cette double condition n'autorise comme solution de  $\Phi$  au voisinage de  $\varphi = 0$  que l'expression :

$$(\Phi)_{\varphi=0} = \cos n\varphi$$

Pour le mode TM envisagé, la solution de  $E_z$  au voisinage de  $\varphi = 0$  est donc :

$$(E_z)_{\varphi=0} = E_0 \cos n\varphi \rho^{\beta} J \sqrt{\beta^2 + n^2(1-2\beta)} (B\rho) e^{j(\omega t - \gamma z)}$$

puisque les fonctions  $Y_v$  ne peuvent être prises en considération, car elles conduiraient à prendre pour  $E_z$  une valeur infinie au centre du guide.

Recherchons les conditions aux limites qui exigent qu'à la périphérie du guide ( $\rho = R$ ) la composante  $E_z$  soit nulle.

D'où :

$$J_v(BR) = 0.$$

Cette relation vérifie également les conditions aux limites relatives à  $E_\varphi$  et  $H_\rho$  définies par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{j\rho}{\gamma} (\omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2) E_\varphi &= 0 \\ \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{j\rho}{\omega \epsilon} (\omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2) H_\rho &= 0 \end{aligned}$$

En posant  $z = B\rho$

et en raison de la faible anisotropie ( $v \approx n(1 - \beta)$ )

$$J_v(z) = J_n(z) + \frac{dJ_n(z)}{dn} \cdot dn = 0$$

Nous allons traiter le problème comme celui d'une perturbation appliquée au cas de la propagation normale. Pour cela nous utilisons la relation :

$$\frac{dJ_n(z)}{dn} = J_n(z) \left( \text{Log} \frac{z}{2} + E \right) - \sum_{r=0}^{\infty} C_n z^{n+2r}$$

dans laquelle :

$$C_n = \frac{(-1)^r}{r! (r+n)!} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r+n} \right) \left( \frac{1}{2} \right)^{n+2r}$$

et nous posons  $z = z_0 + dz_0$ ,  $z_0$  étant la racine de  $(J_n(z))_{z=B_0 R}$



On obtient les relations :

$$J_v(z_0 + dz_0) = J_n(z_0 + dz_0) + \frac{d}{dn} J_n(z_0 + dz_0) \cdot dn$$

$$J_n(z_0 + dz_0) = J'_n(z_0) \cdot dz_0$$

$$J_v(z) = J'_n(z_0) dz_0 \left( 1 - \beta n \left( \log \frac{z_0}{2} + E - \sum_{r=0}^{\infty} C_n(n+2r) z_0^{n+2r-1} \right) \right) \\ + \beta n \sum_{r=0}^{\infty} C_n z_0^{n+2r} = 0$$

Cette dernière expression est limitée au premier ordre et E y désigne la constante d'Euler ( $E = 0,5772 \dots$ ). Les conditions aux limites s'expriment pour  $\rho = R$ , ce qui permet d'écrire :

$$dz_0 = R dB_0 \text{ puisque } z = B_0 \rho + \rho dB_0$$

On obtient :

$$R dB_0 \cdot J'_n(z_0) \left( 1 - \beta n \left( \log \frac{z_0}{2} + E - \sum_{r=0}^{\infty} C_n(n+2r) z_0^{n+2r-1} \right) \right) \\ + \beta n \sum_{r=0}^{\infty} C_n z_0^{n+2r} = 0$$

Il est donc possible d'exprimer la constante de propagation  $\gamma$  en fonction de  $\gamma'_0$ , constante relative au cas d'un guide rempli d'un milieu de permittivité  $\epsilon'$ .

$$\omega^2 \mu \epsilon - \frac{\epsilon}{\epsilon'} \gamma^2 = B^2 \text{ ou } \omega^2 \mu \epsilon' - \gamma^2 = \frac{\epsilon'}{\epsilon} B^2$$

$$\text{Or } \omega^2 \mu \epsilon' - \gamma'^2_0 = B_0^2$$

D'où :

$$\gamma^2 - \gamma'^2_0 = - \frac{2\epsilon}{\epsilon'} B_0 dB_0 + \frac{n}{\epsilon} B_0^2$$

ou en introduisant les longueurs d'onde guidées :

$$\frac{1}{\lambda_p^2} \frac{\epsilon}{\epsilon'} - \frac{1}{\lambda_{g_0}^2} = - \frac{\epsilon}{\epsilon'} \frac{B_0 dB_0}{2\pi^2} + \frac{B_0^2 n}{4\pi^2 \epsilon}$$

On constate donc qu'il ne se propage, dans le plan  $xOz$ , qu'une seule onde ayant une amplitude non nulle, avec une longueur d'onde guidée voisine de celle correspondant au cas d'une substance isotrope de permittivité  $\epsilon'$ .



B) Etude des modes se propageant dans yOz ( $\varphi = \frac{\pi}{2}$ )

---

Le système d'équations I et II prend la forme :

$$\text{I } \left\{ \epsilon' \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon \right) \right. \\ \left. + \eta \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \omega^2 \mu \epsilon + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right\} E_z = 0$$

$$\text{II } \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{\partial}{\partial \rho} \right) E_z = 0$$

Comme lors de l'étude précédente, nous allons rechercher les solutions de  $E_z$  en posant :

$$E_z = E_0 R(\rho) \Phi(\varphi) e^{j(\omega t - \gamma' z)}$$

$$\text{En supposant } \omega^2 \mu \epsilon - \gamma'^2 \neq 0 \text{ et } \omega^2 \mu \epsilon - \frac{\epsilon}{\epsilon'} \gamma'^2 \neq 0$$

l'équation I prend la forme :

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\omega^2 \mu \epsilon - \frac{\epsilon}{\epsilon'} \gamma'^2}{\omega^2 \mu \epsilon - \gamma'^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \omega^2 \mu \epsilon - \gamma'^2 \right) E_z = 0$$

en posant

$$B^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \frac{\epsilon}{\epsilon'} \gamma'^2$$

$$B'^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \gamma'^2$$

on obtient :

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{B^2}{B'^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + B^2 \right) E_z = 0$$

(à remarquer l'analogie avec le calcul précédent, les rôles de B et de B' étant inversés).

$$\text{Posons } \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -n'^2, \quad n' \text{ étant entier,}$$

on a :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \frac{B^2}{B'^2} \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \left( B^2 - \frac{n'^2}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0$$

Faisons le changement de variable  $R(\rho) = \rho^{\beta'} u$ .

$$\text{Si l'on pose } 2\beta' = 1 - \frac{B'^2}{B^2}$$

1. The first part of the paper is devoted to the study of the properties of the function  $f(x)$  defined by the equation

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

It is well known that the function  $f(x)$  is increasing and concave down on the interval  $(-\infty, \infty)$ . The function  $f(x)$  is also bounded on the interval  $(-\infty, \infty)$ .

2. The second part of the paper is devoted to the study of the properties of the function  $g(x)$  defined by the equation

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$



.../.

on peut écrire :

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} + \left( \beta'^2 - \frac{\beta'^2 + n'^2 (1 - 2\beta')}{\rho^2} \right) u = 0$$

et en introduisant la nouvelle variable  $r = B'\rho$

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \left( 1 - \frac{\beta'^2 + n'^2 (1 - 2\beta')}{r^2} \right) u = 0$$

Cette équation est une équation de Bessel dont la solution est :

$$u = C J_{\sqrt{\beta'^2 + n'^2 (1 - 2\beta')}}(B'\rho) + D Y_{\sqrt{\beta'^2 + n'^2 (1 - 2\beta')}}(B'\rho)$$

ce qui donne :

$$R(\rho) = \rho^{\beta'} \left( C J_{\sqrt{\beta'^2 + n'^2 (1 - 2\beta')}}(B'\rho) + D Y_{\sqrt{\beta'^2 + n'^2 (1 - 2\beta')}}(B'\rho) \right)$$

$$\text{où } \beta' = \frac{\omega^2 \mu \eta}{2B^2}$$

Comme dans le calcul précédent, l'équation II sera identiquement vérifiée si  $(\Phi)' = 0$  et  $\Phi'' = -n'^2 \Phi$ . Cette double **condition** n'autorise  $\varphi = \frac{\pi}{2}$

comme solution de  $\Phi$  au voisinage de  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  que l'expression :

$$(\Phi)_{\varphi = \frac{\pi}{2}} = \sin n' \varphi$$

pour le mode TM envisagé, la solution de  $E_z$  au voisinage  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  est donc :

$$(E_z)_{\varphi = \frac{\pi}{2}} = E_0 \sin n' \varphi \rho^{\beta'} J_{\sqrt{\beta'^2 + n'^2 (1 - 2\beta')}}(B'\rho) e^{j(\omega t - \gamma' z)}$$

Les conditions aux limites exigent qu'à la périphérie du guide ( $\rho = R$ ) la composante  $E_z$  soit nulle, c'est-à-dire :  $J_{\sqrt{\beta'^2 + n'^2 (1 - 2\beta')}}(B'R) = 0$

Comme précédemment, nous considérons ce cas comme celui d'une perturbation appliquée à la propagation normale dans un milieu isotrope de permittivité  $\epsilon$ .

Si  $z' = B'\rho$  et en raison de la faible anisotropie,

on peut écrire :

$$v' \approx n' (1 - \beta')$$

$$\text{Posons } z' = z'_0 + dz'_0 \approx B'\rho$$

./...



la forme simple :

$$I \left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\epsilon_z}{\epsilon} (\omega^2 \mu \epsilon + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \right) E_z = 0$$

$$II \left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \omega^2 \mu \epsilon + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) H_z = 0$$

Ce système de deux équations linéaires ne dépendant chacune que d'une seule variable montre l'existence de modes TE et TM distincts.

Nous allons les étudier séparément, mais de façon assez rapide, puisqu'ils peuvent être considérés comme cas particuliers de la propagation dans un milieu gyromagnétique (4).

#### A) Modes TE

Nous supposons alors  $E_z = 0$  et nous allons déterminer  $H_z$  à partir de l'équation II.

Recherchons une équation de la forme :

$$H_z = H_0 R(\rho) \Phi(\varphi) e^{j(\omega t - \gamma z)}$$

ce qui permet d'écrire l'équation II sous la forme :

$$R''(\rho) + \frac{1}{\rho} R'(\rho) + R(\rho) (\omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2 - \frac{\Phi''(\varphi)}{\rho^2 \Phi(\varphi)}) = 0$$

$$\text{Posons } \frac{\Phi''}{\Phi} = -n^2$$

$$\text{et } \omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2 = A^2.$$

Faisons le changement de variable  $r = A\rho$ , l'équation devient :

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + R \left(1 - \frac{n^2}{r^2}\right) = 0$$

C'est une équation de Bessel.

Nous ne conservons que les solutions  $J_n$  pour éviter une solution infinie au centre du guide.

Finalement, nous obtenons :

$$H_z = H_0 J_n(A\rho) \sin n\varphi e^{j(\omega t - \gamma z)}$$

Les autres composantes  $H_\rho$ ,  $H_\varphi$ ,  $E_\rho$  et  $E_\varphi$  peuvent être déterminées en reportant la valeur de  $H_z$  dans les équations de Maxwell initiales. Nous ne donnerons pas ces expressions, car elles sont analogues à celles obtenues pour les modes TE dans le cas d'un guide contenant une substance



isotrope de permittivité  $\epsilon$ . Il en est de même pour la relation de propagation :

$$\omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2 = A^2$$

et les conditions aux limites, données par :

$$\left( J'_n(A\rho) \right)_{\rho=R} = 0$$

Tout se passe comme si la propagation de l'onde s'effectuait dans un milieu isotrope de permittivité  $\epsilon$ , à une onde incidente TE donnée ne correspond qu'une seule onde transmise de mode TE elle aussi.

#### B) Modes TM

Nous supposons alors  $H_z = 0$  et allons déterminer  $E_z$  à partir de l'équation I.

Nous allons rechercher une équation de la forme :

$$E_z = E_0 R(\rho) \phi(\rho) e^{j(\omega t - \gamma z)}$$

ce qui permet d'écrire l'équation I sous la forme :

$$R''(\rho) + \frac{1}{\rho} R'(\rho) + R \left( \frac{\epsilon_z}{\epsilon} (\omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2) - \frac{n^2}{\rho^2} \right) = 0$$

Posons  $\frac{\epsilon_z}{\epsilon} (\omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2) = B^2$  et faisons le changement de variable  $r = B\rho$

L'équation devient alors :

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + R \left( 1 - \frac{n^2}{r^2} \right) = 0$$

et l'on obtient finalement :

$$E_z = E_0 J_n(B\rho) \cdot \sin n\varphi \cdot e^{j(\omega t - \gamma z)}$$

Le calcul des autres composantes se ferait en reportant la valeur de  $E_z$  dans les équations initiales. Ces composantes ont des expressions analogues à celles relatives à un milieu isotrope, mais l'équation de propagation

$$\omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2 = \frac{\epsilon}{\epsilon_z} B^2$$

est légèrement différente, tandis que les conditions aux limites s'expriment par la relation :

$$\left( J_n(B\rho) \right)_{\rho=R} = 0$$





A une onde incidente TM donnée, correspond donc une seule onde transmise de type TM de structure analogue à celle observée dans le cas d'une lame isotrope.

### C) Conclusion

-----

De ce qui précède, nous déduisons que pour une onde incidente donnée il n'existe qu'une seule onde de type TE ou TM. En raison de la continuité des champs sur les surfaces de séparation de la lame, seule une onde transmise de type TE existe dans notre cas, puisque les guides adjacents à l'échantillon ne permettent la propagation que du mode  $TE_{11}$ .

Ceci est à rapprocher de ce que l'on observe en optique classique et dans un cas comme dans l'autre on n'obtient pas de phénomène polarimétrique.

D'ailleurs, même en supposant que l'on puisse exciter simultanément les deux modes, la différence de structure des ondes et leurs positions relatives dans l'espace ne permettent pas d'obtenir des phénomènes polarimétriques classiques.

## VIII - ETUDE DE LA PROPAGATION DANS UN GUIDE CONTENANT UNE SUBSTANCE BIAXE

Nous considérons maintenant un guide cylindrique qu'on remplit d'une lame cristalline biaxe dont l'une des directions principales de l'ellipsoïde de permittivité est confondue avec la direction de propagation Oz. La propagation de l'onde est régie par les équations générales I et II du paragraphe III en posant :  $\epsilon \neq \epsilon' \neq \epsilon_z$ .

Si expérimentalement les guides incident et récepteur ne permettent la propagation que de modes TE ou TM, seul un mode de même type pourra se propager dans la section de guide contenant la lame. Nous allons donc étudier séparément les modes TE et TM.

### A) Modes TE

-----

Les équations I et II prennent la forme indiquée sur la planche IV.

Ce système est identique à celui qui nous a permis d'étudier, dans les deux cas particuliers  $\varphi = 0$  et  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , la propagation des modes TE dans le cas d'une lame uniaxe.



Nous obtenons, pour une onde incidente donnée, deux ondes transmises se propageant comme si la substance remplissant le guide était uniaxe ( $\epsilon_z = \epsilon$ ). Les phénomènes polarimétriques observés ne sont donc liés qu'aux deux valeurs principales  $\epsilon$  et  $\epsilon'$ , à l'exclusion de celle portée par la direction de propagation ( $\epsilon_z$ ). Physiquement, ceci peut s'expliquer intuitivement en remarquant que le champ électrique n'a aucune composante suivant Oz et que, par conséquent, la permittivité suivant cette direction n'intervient pas.

### B) Modes TM

Ces modes sont régis par les deux équations données au § III et représentées sur la planche IV.

Nous allons étudier successivement les deux cas  $\varphi = 0$  et  $\varphi = \frac{\pi}{2}$

#### a) Etude des modes se propageant dans xOz ( $\varphi = 0$ )

Les équations deviennent :

$$\begin{aligned} & \left\{ \epsilon_z (\omega^4 \mu^2 \epsilon^2 + \frac{\epsilon + \epsilon'}{\epsilon'} \omega^2 \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\epsilon}{\epsilon'} \frac{\partial^4}{\partial z^4}) \right. \\ & + \frac{\epsilon}{\epsilon'} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \epsilon' \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon \epsilon' \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \\ & \left. + \frac{\epsilon}{\epsilon'} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \epsilon \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon \epsilon' \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right\} E_z = 0 \end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \right) \right\} E_z = 0$$

Nous allons rechercher une solution de la forme :

$$E_z = E_0 R(\rho) \Phi(\varphi) e^{j(\omega t - \gamma z)}$$

ce qui permet d'écrire la première équation sous la forme :

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \cdot \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{\epsilon}{\epsilon'} \frac{A'^2}{A^2} + \frac{\epsilon_z}{\epsilon'} A'^2 \right) R = 0$$

$$\text{avec } A^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2$$

$$A'^2 = \omega^2 \mu \epsilon' - \gamma^2$$

$$\text{Posons : } \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -n^2$$



# A) Modes TE

$$\text{I: } \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2} \sin 2\varphi \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \cos 2\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \right) - \sin 2\varphi \frac{\partial}{\partial \rho} \right] H_3 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{II: } & \left\{ \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon' \right) \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon' \right) \right. \\ & + \omega^2 \mu \eta \left( \sin^2 \varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \cos^2 \varphi \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon' \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \sin 2\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \cos 2\varphi \right) - \frac{1}{\rho} \sin 2\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \right) \right\} H_3 = 0 \end{aligned}$$

# B) Modes TM

$$\begin{aligned} & \left\{ \epsilon_3 \left( \omega^4 \epsilon^2 \mu^2 + \frac{\epsilon + \epsilon'}{\epsilon'} \omega^2 \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\epsilon}{\epsilon'} \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right) + \frac{\epsilon}{\epsilon'} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \left( a \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right. \right. \right. \\ & + \left. \left. b \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon \epsilon' \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right] + \frac{\epsilon}{\epsilon'} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \left( b \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + c \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \omega^2 \mu \epsilon \epsilon' \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \right\} E_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{2} \sin 2\varphi \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \cos 2\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \right) - \sin 2\varphi \frac{\partial}{\partial \rho} \right\} E_3 = 0 \end{aligned}$$





Remarquons dès maintenant que la fonction  $\Phi(\varphi)$  doit être de la forme  $\cos n\varphi$  pour pouvoir vérifier simultanément les deux équations.

En posant :

$$B^2 = \frac{\epsilon_z}{\epsilon'} A'^2 \quad \text{et} \quad v^2 = -n^2 \frac{\epsilon}{\epsilon'} \frac{A'^2}{A^2}$$

et en faisant le changement de variable  $r = B\rho$ , l'équation prend la forme canonique :

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(1 - \frac{v^2}{r^2}\right) R = 0$$

On obtient finalement la solution cherchée :

$$(E_z)_{\varphi=0} = E_0 J_v(B\rho) \cos n\varphi e^{j(\omega t - \gamma z)}$$

Nous ne développerons pas l'étude de l'équation de propagation imposée par les conditions aux limites, car son calcul est analogue à celui effectué pour les modes TM d'un milieu uniaxe. On peut d'ailleurs noter que nous avons pris, de façon à leur donner des formes aussi voisines que possible, des notations analogues.

Nous observons qu'il ne se propage, dans le plan  $xOz$ , qu'une onde avec une amplitude non nulle, ayant une vitesse de propagation voisine de celle existant dans un guide rempli d'une substance isotrope de permittivité  $\epsilon$ .

b) Etude des modes se propageant dans le plan  $yOz$  - ( $\varphi = \frac{\pi}{2}$ )

Les équations deviennent :

$$\begin{aligned} & \{ \epsilon_z ( \omega^4 \mu^2 \epsilon^2 + \frac{\epsilon + \epsilon'}{\epsilon'} \omega^2 \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\epsilon}{\epsilon'} \frac{\partial^4}{\partial z^4} ) \\ & + \frac{\epsilon}{\epsilon'} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} ( \epsilon \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon \epsilon' \rho \frac{\partial}{\partial \rho} ) \\ & + \frac{\epsilon}{\epsilon'} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} ( \epsilon' \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon \epsilon' \frac{\partial}{\partial \varphi} ) \} E_z = 0 \\ & \{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} ( \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} ) \} E_z = 0 \end{aligned}$$

Nous allons rechercher une solution de la forme

$$E_z = E_0 R(\rho) \Phi(\varphi) e^{j(\omega t - \gamma' z)}$$

./...



ce qui permet d'écrire la première équation sous la forme :

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} \frac{1}{\phi} \cdot \frac{\epsilon'}{\epsilon} \frac{A^2}{A'^2} + \frac{\epsilon_z}{\epsilon} A^2 \right) R = 0$$

$$\text{Posons } \frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} = -n^2$$

La fonction  $\phi(\varphi)$  doit être de la forme  $\sin n\varphi$  pour satisfaire simultanément les deux équations.

En posant :

$$B'^2 = \frac{\epsilon_z}{\epsilon} A^2 \quad \text{et} \quad v'^2 = -n^2 \frac{\epsilon'}{\epsilon} \frac{A^2}{A'^2}$$

et en faisant le changement de variable  $r = B'\rho$ , l'équation prend la forme classique :

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(1 - \frac{v'^2}{r^2}\right) R = 0$$

On obtient finalement la solution cherchée :

$$E_z = E_0 J_v(B'\rho) \sin n\varphi e^{j(\omega t - \gamma'z)}$$

Il existe donc une seule onde d'amplitude non nulle, dans le plan  $yOz$ , se propageant avec une vitesse voisine de celle correspondant au cas du milieu isotrope de permittivité  $\epsilon'$ . Ceci peut se montrer aisément, en écrivant l'équation de propagation imposée par les conditions aux limites. Ce calcul est analogue à celui du cas précédent et nous ne le développerons donc pas.

#### c) Interprétation

-----

Dans le cas du milieu biaxe, pour les modes TE comme pour les modes TM, à une onde incidente donnée correspondent deux vibrations orthogonales se propageant avec deux vitesses différentes, rendant possible l'observation de phénomènes polarimétriques classiques.

#### IX— CONCLUSION

L'étude qui précède montre que dans un guide cylindrique, rempli d'un corps anisotrope, existent des modes TE et TM. Pour chacun d'eux, à une onde incidente de fréquence donnée, correspondent deux vibrations orthogonales, sauf dans le cas où l'axe cristallin est parallèle à la direction de propagation. Ceci autorise donc l'étude de phénomènes polarimétriques lorsqu'une onde traverse une lame taillée parallèlement



à l'axe, ou, s'il s'agit d'un milieu biaxe, lorsque deux des directions principales sont contenues dans un plan de section droite.

Comme des études précédentes (47 - 49) ont montré que, lors du passage d'un guide vide à un guide rempli d'un diélectrique, il n'y a pas apparition de nouveaux modes si le guide incident ne permet la propagation que d'un seul, on pourra se placer dans des conditions où seul existe le mode fondamental  $TE_{11}$ . Dans ce cas, les phénomènes polarimétriques sont dûs à la combinaison de deux vibrations se propageant avec des vitesses voisines de celles correspondant aux cas des milieux séparés de permittivité  $\epsilon$  et  $\epsilon'$ . Nous avons donné l'expression des termes correctifs, mais, si l'on remarque qu'ils sont inversement proportionnels au rayon du guide, l'utilisation d'un guide de grand diamètre permet de négliger ces termes, ce qui facilite les calculs numériques.

-:-:-





ANNEXE MATHEMATIQUE (Chapitre V)

=====

TRANSFORMATION DU SYSTEME COMPLET DES EQUATIONS DE MAXWELL EN UN  
SYSTEME A DEUX INCONNUES

Nous supposons que l'onde électromagnétique est une vibration sinusoïdale dont toutes les composantes comportent le terme  $e^{j\omega t}$  comme fonction du temps. Pour alléger le calcul, nous définirons les paramètres :

$$a = \epsilon' + \eta \sin^2 \varphi$$

$$b = \eta \sin \varphi \cos \varphi$$

$$c = \epsilon' + \eta \cos^2 \varphi$$

Les équations de Maxwell s'écrivent alors :

$$(1) \quad \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \rho E}{\partial z} = - j\omega \mu H_\rho$$

$$(2) \quad \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = - j\omega \mu H_\varphi$$

$$(3) \quad \frac{\partial \rho E_\varphi}{\partial \rho} - \frac{\partial E_\rho}{\partial \varphi} = - j\omega \mu H_z$$

$$(4) \quad \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \rho H_\varphi}{\partial z} = j\omega \rho (a E_\rho + b E_\varphi)$$

$$(5) \quad \frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = j\omega (b E_\rho + c E_\varphi)$$

$$(6) \quad -\frac{\partial \rho H_\varphi}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} = j\omega \rho E_z$$

La droite Oz confondue avec l'axe du guide est la direction de propagation de l'onde et cette propriété remarquable nous a conduit à rechercher par éliminations successives un système d'équations dont les inconnues sont uniquement  $E_z$  et  $H_z$ .

Calculons d'abord  $\rho E_\varphi$  et  $E_\rho$  à partir des équations (4) et (5)

./...



$$\rho E_{\varphi} = -\frac{1}{j\omega\epsilon\epsilon'} \left( (b \frac{\partial}{\partial \varphi} + a\rho \frac{\partial}{\partial \rho}) H_z - \rho \frac{\partial}{\partial z} (a H_{\rho} + b H_{\varphi}) \right)$$

$$E_{\rho} = \frac{1}{j\omega\epsilon\epsilon'} \left( (c \frac{\partial}{\partial \varphi} + b \frac{\partial}{\partial \rho}) H_z - \frac{\partial}{\partial z} (b H_{\rho} + c H_{\varphi}) \right)$$

Les équations (1) et (2) deviennent celles indiquées sur la planche V.

Dans le cas d'un milieu uniaxe ( $\epsilon = \epsilon_z$ ), il est possible de mettre cette équation sous la forme plus simple donnée par la planche VI- a.

Calculons maintenant  $H_{\rho}$  et  $H_{\varphi}$  à partir des équations (1) et (2)

$$H_{\rho} = -\frac{1}{j\omega\mu\rho} \left( \frac{\partial E_z}{\partial \rho} - \frac{\partial \rho E_{\varphi}}{\partial z} \right)$$

$$H_{\varphi} = -\frac{1}{j\omega\mu} \left( \frac{\partial E_{\rho}}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right)$$

Les équations (4) et (5) prennent la forme :

$$j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \rho \frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho \partial z} = -\rho \left( \omega^2 \mu a + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_{\rho} - \omega^2 \mu \rho b E_{\varphi}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi \partial z} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = \omega^2 \mu b E_{\rho} + \left( \omega^2 \mu c + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_{\varphi}$$

En reportant dans l'équation (3) on obtient les résultats figurant sur la planche VI - b.

Les équations I et II constituent le système à deux inconnues cherché. Malheureusement, les opérateurs de  $E_z$  et  $H_z$  ne sont pas commutatifs, ce qui ne permet pas une résolution normale de ce système.

-:-:-:-

201

$$\begin{aligned}
& -j\omega\epsilon\left[\frac{1}{\epsilon'}\left(a\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+b\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\omega^2\epsilon\mu\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right]E_3+\frac{\epsilon}{\epsilon'}\frac{\partial}{\partial z}\left[\omega^2\mu\left(b\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right.\right. \\
& \left.\left.+c\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]H_3=\left[\omega^4\epsilon^2\mu^2+\frac{\epsilon+\epsilon'}{\epsilon'}\omega^2\epsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\epsilon}{\epsilon'}\frac{\partial^4}{\partial z^4}\right]\rho H_4 \\
& j\omega\epsilon\left[\frac{1}{\epsilon'}\left(b\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{c}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\omega^2\epsilon\mu\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]E_3+\frac{\epsilon}{\epsilon'}\frac{\partial}{\partial z}\left[\omega^2\mu\left(a\frac{\partial}{\partial\rho}\right.\right. \\
& \left.\left.+\frac{b}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\right]H_3=\left[\omega^4\epsilon^2\mu^2+\omega^2\epsilon\mu\frac{\epsilon+\epsilon'}{\epsilon'}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\epsilon}{\epsilon'}\frac{\partial^4}{\partial z^4}\right]H_\rho
\end{aligned}$$

En reportant dans l'équation (6) :

$$\begin{aligned}
& j\omega\left\{\rho\epsilon_3\left(\omega^4\epsilon^2\mu^2+\frac{\epsilon+\epsilon'}{\epsilon'}\omega^2\epsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\epsilon}{\epsilon'}\frac{\partial^4}{\partial z^4}\right)+\frac{\epsilon}{\epsilon'}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\epsilon'}\left(a\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right.\right.\right. \\
& \left.\left.+b\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\omega^2\epsilon\mu\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right]+\frac{\epsilon}{\epsilon'}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{1}{\epsilon'}\left(b\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{c}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right. \\
& \left.+\omega^2\epsilon\mu\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\Big\}E_3-\frac{\epsilon}{\epsilon'}\omega^2\mu\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\left(b\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+c\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(a\frac{\partial}{\partial\rho}\right.\right. \\
& \left.\left.+\frac{b}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right\}H_3=0
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
& j\left\{\epsilon_3\left(\omega^4\epsilon^2\mu^2+\frac{\epsilon+\epsilon'}{\epsilon'}\omega^2\epsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\epsilon}{\epsilon'}\frac{\partial^4}{\partial z^4}\right)+\frac{\epsilon}{\epsilon'}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\left(a\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right.\right.\right. \\
& \left.\left.+b\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\omega^2\epsilon\epsilon'\mu\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right]+\frac{\epsilon}{\epsilon'}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\left(b\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+c\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right. \\
& \left.+\omega^2\epsilon\epsilon'\mu\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\Big\}E_3-\frac{\epsilon}{\epsilon'}\omega\mu\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(b\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+c\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right. \\
& \left.-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(a\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+b\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right\}H_3=0
\end{aligned}$$





I

$$\begin{aligned}
 & j \left\{ \epsilon' \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \epsilon \mu \right] \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \epsilon \mu \right] + \eta \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ \sin^2 \varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \cos^2 \varphi \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \epsilon \mu + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\sin 2 \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \cos 2 \varphi) - \frac{1}{\rho} \sin 2 \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \right\} \right\} E_z \\
 & - \omega \mu \eta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{2} \sin 2 \varphi \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \cos 2 \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \right) - \sin 2 \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} \right\} H_z = 0
 \end{aligned}$$

Planche VI a

II

$$\begin{aligned}
 & j \left\{ \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon' \right) \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon' \right) + \omega^2 \mu \eta \left\{ \sin^2 \varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \cos^2 \varphi \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon' + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\sin 2 \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \cos 2 \varphi) - \frac{1}{\rho} \sin 2 \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \right\} \right\} H_z \\
 & - \eta \omega \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{2} \sin 2 \varphi \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \cos 2 \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \right) - \sin 2 \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} \right\} E_z = 0
 \end{aligned}$$

Planche VI b



=====

## LE MONTAGE HYPERFREQUENCE

Nous avons esquissé au chapitre I la description des dispositifs utilisés. Les montages sont fort différents suivant que l'étude des échantillons se fait par transmission ou bien par réflexion, mais des motifs d'économie nous ont conduits à utiliser le même générateur d'ondes centimétriques pour tous nos montages. Nous nous proposons donc d'étudier :

- Le générateur d'ondes.
- Les circuits de stabilisation et de modulation de l'onde, qui font eux aussi partie de la branche commune aux deux montages.
- Le dispositif par transmission avec la description des polariseurs et analyseurs employés.
- Le dispositif fonctionnant par réflexion, à l'exception du montage fournissant le champ magnétique qui sera étudié ultérieurement.
- La technique de fabrication des éléments spéciaux.

I - LE GENERATEUR D'ONDES CENTIMETRIQUES

C'est en bande X que nous avons choisi de pratiquer nos recherches, et c'est pourquoi nous avons fait appel à un klystron comme générateur d'ondes. Parmi les nombreux modèles existants, nous avons finalement choisi un klystron Thomson-Varian TV 58 fournissant une puissance élevée, de l'ordre de 600 mW, tout en couvrant une large plage de fréquences comprises entre 8,5 GHz et 10 GHz.

Il est monté dans une boîte étanche remplie d'huile isolante, où il est complètement immergé. Ce bain sert de fluide de transfert et permet une évacuation de la chaleur dissipée vers les parois en cuivre de la boîte. Une circulation d'eau dans un serpentín entourant la boîte maintient celle-ci à environ 15° C et permet donc un refroidissement très efficace du klystron. Sa durée de vie est ainsi augmentée tandis que la grande inertie thermique de l'ensemble accroît la stabilité en fréquence de l'onde émise.

Le klystron est monté avec sa cathode à la masse et nous avons donc isolé son bâti relié à la cavité du reste du montage à l'aide d'une lame de mica serrée entre les brides de raccordement. Le montage électrique fait appel à trois alimentations réglées :

./...



#### A) Alimentation du filament (figure VI- 1)

-----

C'est un montage à semi-conducteurs où la tension de référence est fournie par une diode Zen.r IN 748 A. La tension de sortie est ajustable et elle est réglée à 6,3 V à l'aide du potentiomètre P. L'intensité maximale est de 3A et l'ondulation résiduelle reste toujours inférieure à 50  $\mu$ V, tandis que le coefficient de régulation est voisin de 1200.

#### B) Alimentation de la cavité (figure VI- 2)

-----

Le klystron TV 58 offre la possibilité de plusieurs types de fonctionnement suivant la puissance haute fréquence désirée, la tension de la cavité variant entre 300 et 500 V. Nous avons donc réalisé une alimentation régulée dont on peut ajuster la tension de sortie entre 300 et 500 V, tandis que le débit maximal peut atteindre 100 mA. La tension de référence est prélevée aux bornes d'un tube à gaz OB3 et le montage a été étudié pour fonctionner avec la sortie négative à la masse. La stabilité à court terme est de  $10^{-5}$ , l'ondulation résiduelle est de l'ordre du millivolt, et le coefficient de régulation de 850.

#### C) Alimentation du réflecteur (figure VI- 3)

-----

C'est dans le but, favorable à la stabilité en fréquence, d'alimenter sous basse impédance le réflecteur, que nous avons préféré l'utilisation d'une alimentation régulée réglable, plutôt que l'emploi d'un montage potentiométrique alimenté par une tension fixe. Le montage a été spécialement étudié pour fonctionner parfaitement avec sa borne positive reliée à la masse ; il comprend deux ensembles de régulation en cascade. La tension continue est initialement régulée par une série de quatre tubes OA3, avant d'être appliquée à un montage de régulation électronique. On dispose alors d'une tension variable entre 100 et 500 V dont la stabilité instantanée est de  $10^{-5}$  lorsque le débit ne dépasse pas 2 mA. Le coefficient de régulation est de 1050.

### II- STABILISATION DE LA FREQUENCE EMISE (54)

Même placé dans un montage analogue à celui que nous venons de décrire, un klystron n'émet pas une onde suffisamment monochromatique dans le temps, pour pouvoir manipuler avec précision.

Pour y remédier, il est par suite nécessaire d'adjoindre un système de stabilisation au générateur d'onde utilisé.







# ALIMENTATION FILAMENT

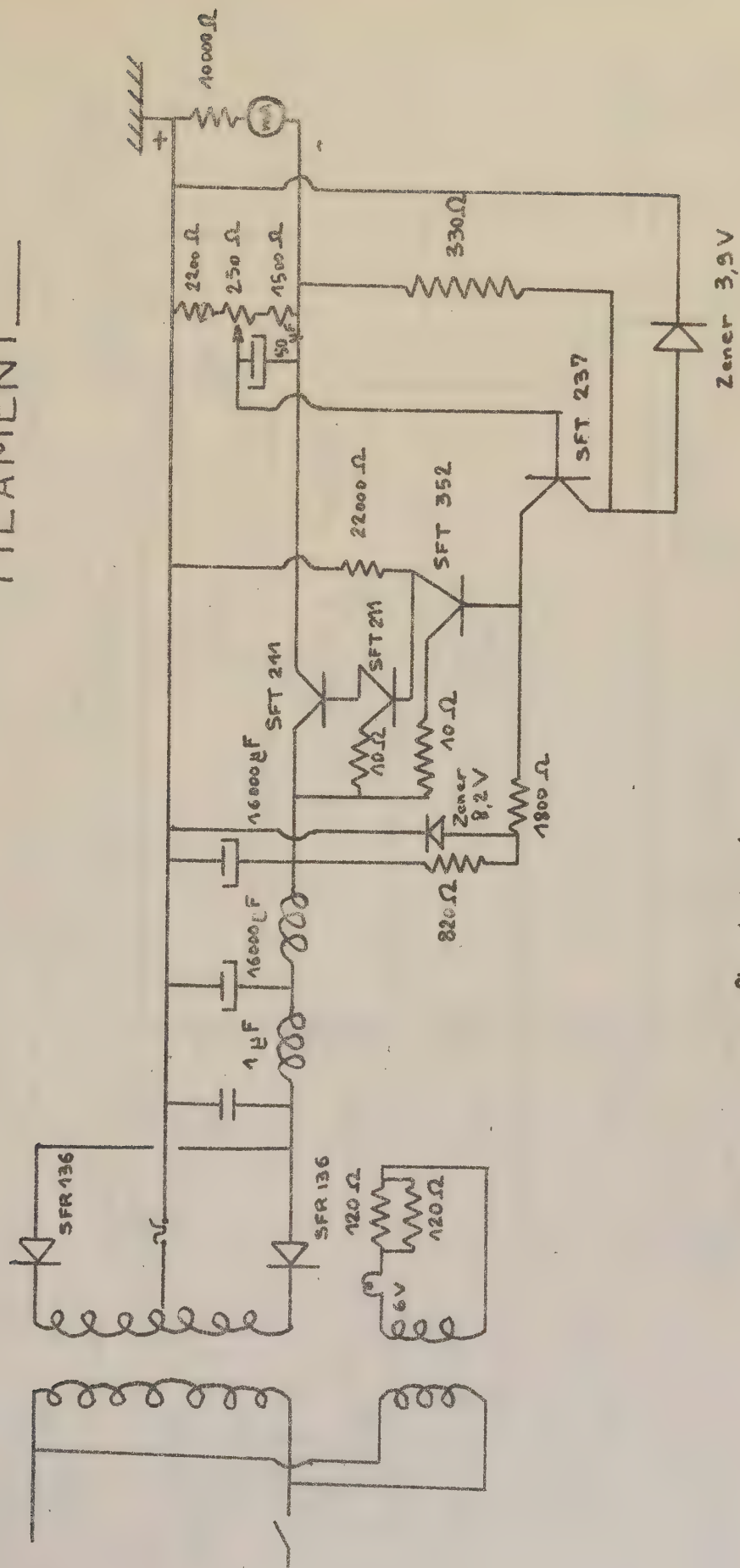


fig. VI - 1



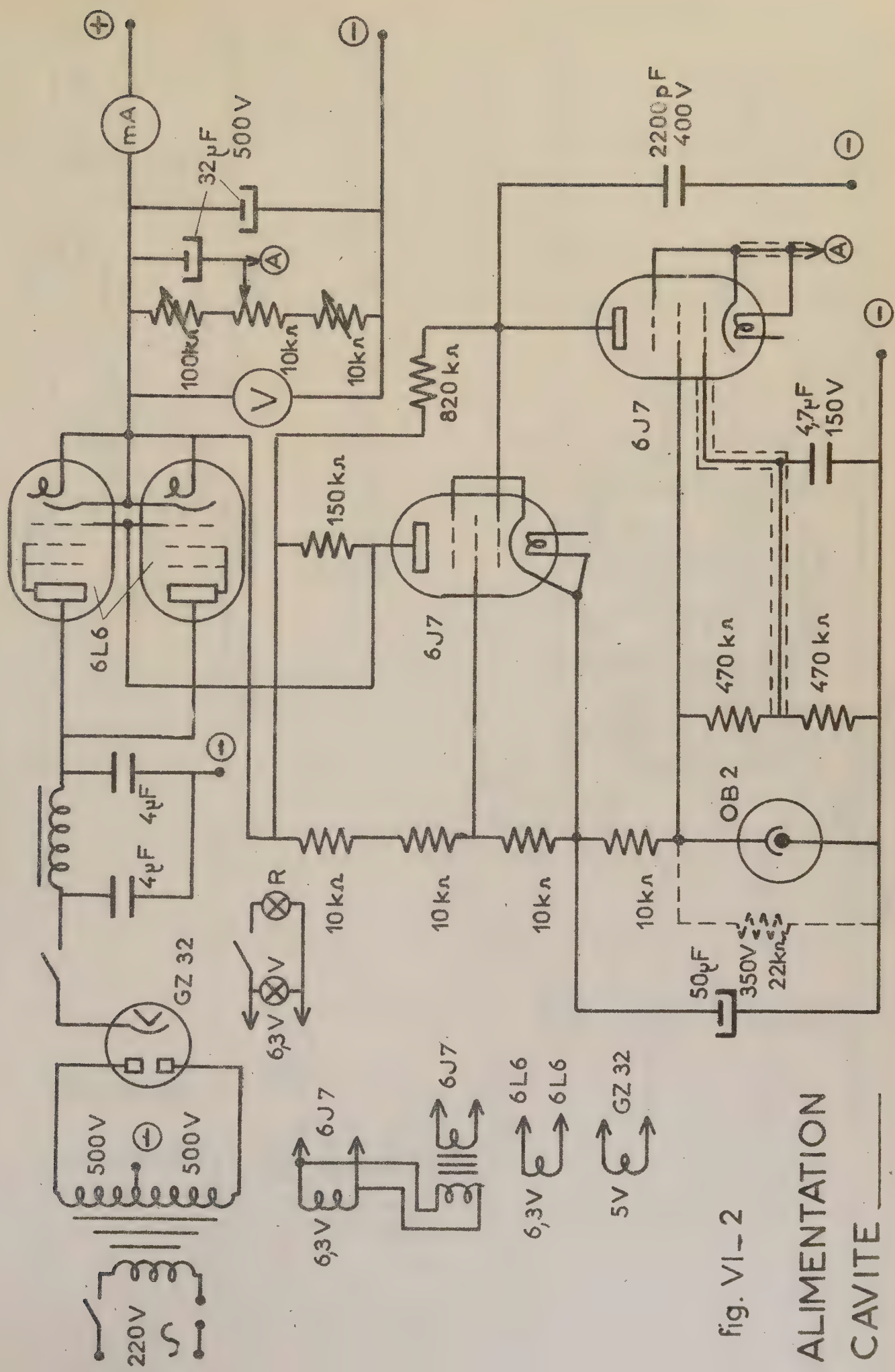


fig. VI-2

ALIMENTATION  
CAVITE











### A) Généralités

-----

Avant d'aborder le problème de la stabilisation de fréquence proprement dite, il nous paraît indispensable de rappeler les caractéristiques de fonction d'un klystron reflex. Nous savons qu'un klystron peut fonctionner suivant un certain nombre de modes. Pour chacun d'entre eux, considérons la courbe (figure VI-4), donnant l'énergie fournie par le klystron en fonction de la tension du réflecteur et celle correspondante (figure VI-5) de la variation de la fréquence émise en fonction de la même variable. Nous voyons que la courbe  $f = F(V_r)$  présente un point d'inflexion pour la fréquence  $f_0$  ; au voisinage de ce point, on peut admettre qu'il y a proportionnalité entre  $df$  et  $dV_r$ , alors que l'énergie reste constante et égale à sa valeur nominale  $W_0$ .

Pour maintenir la fréquence émise égale à la valeur  $f_0$ , c'est-à-dire réaliser un dispositif de stabilisation, il faut disposer d'un appareil donnant une tension proportionnelle à l'écart de fréquence existant entre celle désirée  $f_0$  et celle produite  $f$ . Il est alors possible d'appliquer après amplification cette tension au réflecteur du klystron avec la phase convenable pour obtenir la correction. Pour réaliser une telle installation, plusieurs systèmes ont été proposés ; ils diffèrent par leurs principes d'obtention et d'amplification de la tension d'erreur liée à l'écart de fréquence. Pour obtenir ce signal, la plupart des montages utilisent comme élément de référence une cavité résonnante dont les propriétés varient avec la fréquence de la même façon que celles, bien connues, d'un circuit oscillant classique à constantes localisées. Plus récemment est apparu le montage à oscillateur de référence, dans lequel un générateur étalon fournit une onde de grande stabilité à laquelle on essaie de synchroniser l'onde émise par le klystron.

Examinons les différents dispositifs employés, en étudiant tout d'abord ceux utilisant comme fréquence de référence celle d'une cavité résonnante.

#### a) Stabilisateur à discriminateur de fréquence (7,55,56)

-----

Comme dans un discriminateur FM réalisé à une fréquence de quelques MHz, on effectue la somme et la différence de l'onde incidente avec celle provenant de la cavité de référence. Les vibrations ainsi obtenues sont détectées par deux diodes dont la différence des tensions fournies constitue le signal d'erreur. Ce montage présente l'inconvénient de fournir la tension de correction sous forme différentielle et d'exiger un montage du discriminateur aussi symétrique que possible. Ces raisons,



auxquelles s'ajoutait, à l'époque, le problème maintenant résolu de la construction facile d'amplificateurs à courant continu, ont conduit à l'étude de montages où le signal apparaît aux bornes d'un détecteur unique et où l'amplification est réalisée en courant alternatif.

#### b) Stabilisateur Pound (57)

-----  
Ce stabilisateur emploie comme élément de référence une cavité résonnante utilisée par réflexion. La phase de l'onde réfléchie dépend en grandeur et en signe de l'écart existant entre la fréquence incidente et celle de résonance. L'onde réfléchie, préalablement modulée en amplitude à fréquence moyenne (30 MHz environ), donne par combinaison avec l'onde incidente dans un cristal détecteur un signal de moyenne fréquence facile à amplifier.

#### c) Stabilisateur à modulation de fréquence (58, 59, 60, 61)

-----  
Dans ce dispositif réalisé industriellement et utilisé fréquemment dans les spectrographes RPE, on crée une très légère modulation de fréquence de l'onde émise. Cette onde excite la cavité de référence, et la diode associée donne un signal à la fréquence de modulation dont la phase dépend de l'écart de fréquence. Après amplification, un détecteur de phase permet d'obtenir le signal de correction. En raison du principe même employé, il subsiste cependant une légère modulation de fréquence de la vibration émise. Un système voisin, évitant cet inconvénient (62), consiste non plus à moduler en fréquence le klystron, mais à utiliser une cavité de référence dont on fait varier la fréquence de résonance au rythme de la modulation, grâce à une lame piézoélectrique placée sur une face de la cavité. Comme précédemment, le cristal détecteur donne un signal à la fréquence de modulation dont la phase dépend de l'écart de fréquence.

#### d) Stabilisateur à oscillateur étalon (63)

-----  
La fréquence du klystron est comparée à un harmonique de rang élevé d'un oscillateur étalon à très grande stabilité. Un détecteur de phase permet alors d'obtenir le signal de stabilisation. (Il est à noter que ce dispositif est réalisé industriellement).

Ces divers systèmes de stabilisation sont complexes et font appel à des circuits électroniques demandant une mise au point assez difficile. Nous avons préféré en réaliser un plus simple, dont le principe ne semble pas avoir été employé dans les réalisations classiques.

#### B) Principe

-----  
Pour obtenir le signal de correction, nous utilisons comme élément de référence la cavité d'un ondemètre fonctionnant sur le mode  $TE_{011}$





dont le cristal détecteur associé fournit un signal dépendant de la fréquence incidente. Considérons la courbe  $V_c = F'(f)$  représentant le signal détecté en fonction de la fréquence (figure VI-6). C'est une courbe de résonance classique, dont le maximum est d'autant plus étroit que le coefficient de qualité de la cavité est grand. On peut admettre avec une bonne approximation que les flancs de cette courbe sont rectilignes et que pour un point de fonctionnement sensiblement au milieu nous pouvons écrire :

$dV_c = \pm k_c \cdot df$ . La courbe étant symétrique, le signe (+) correspond au point P et le signe (-) au point Q sur l'autre flanc. Nous pouvons donc choisir à notre gré le signe de la tension d'erreur pour que, après amplification, celle-ci soit appliquée avec la bonne phase au réflecteur. Les variations de tension nous permettent de corriger les variations de fréquence, mais le signal comporte une composante continue dont on peut annuler l'action en lui opposant la tension d'une pile au mercure de bonne stabilité. La f.e.m. d'un tel élément est voisine de 1,4 V et il est donc nécessaire de prévoir un système potentiométrique pour pouvoir amener le point de fonctionnement en un point convenable du flanc de la courbe de résonance. Il est toutefois souhaitable que la tension maximale fournie par la diode, soit la plus grande possible.

### C) Réalisation

-----

L'élément de référence est l'ondemètre de notre montage, possédant un coefficient de qualité de 5000. L'amplification du signal est effectuée par un amplificateur à courant continu Dymec, DY 2460 A, dont l'amplification peut être réglée d'une façon continue de 0 à 11000.

C'est cette possibilité, jointe au très faible bruit de fond et à une impédance de sortie très basse, qui a guidé notre choix sur ce modèle. Le klystron étant monté avec sa cathode à la masse, la sortie de l'amplificateur est intercalée en série entre la masse et la borne positive de l'alimentation du réflecteur. La tension d'opposition est fournie par une pile Mallory ZM9. Tous ces éléments sont assemblés suivant le schéma de la figure VI-7.

On voit qu'à la sortie de la diode un pont de résistances permet d'observer les tensions  $V_{cm}/2$  et  $V_{cm}/4$ . C'est le potentiomètre P placé aux bornes de la pile qui est utilisé pour amener la tension d'opposition à la valeur  $V_{cm}/2$ , tandis qu'un voltmètre à zéro central, branché à la sortie de l'amplificateur, permet de vérifier que la tension de correction reste au voisinage de zéro. Le circuit RC inséré dans la liaison au réflecteur modifie la courbe de réponse globale, et son réglage permet d'obtenir un fonctionnement stable sans oscillations parasites.





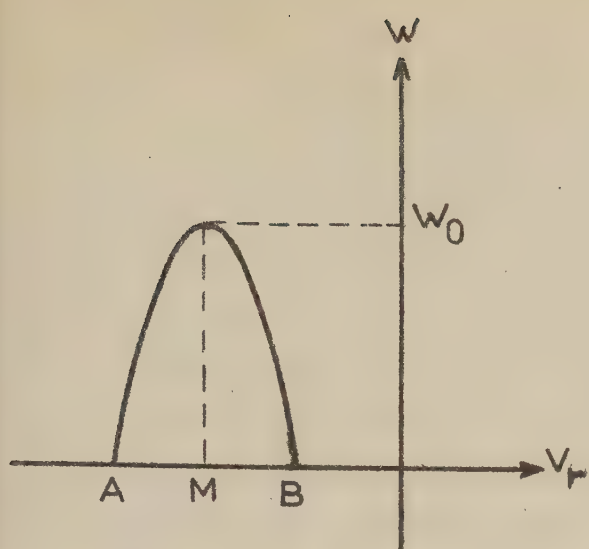


fig. VI\_4

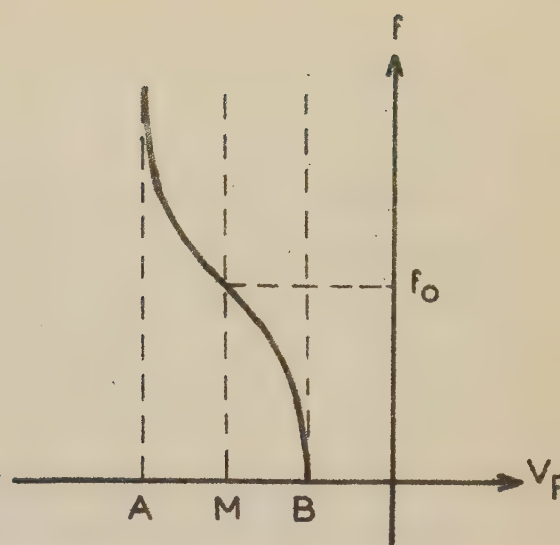


fig. VI\_5

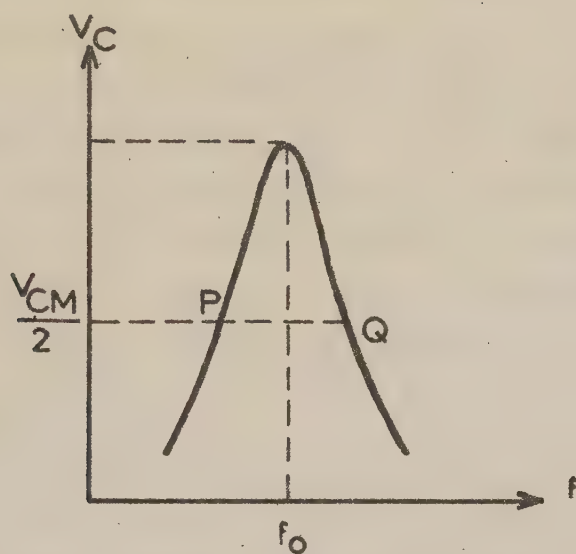


fig. VI\_6

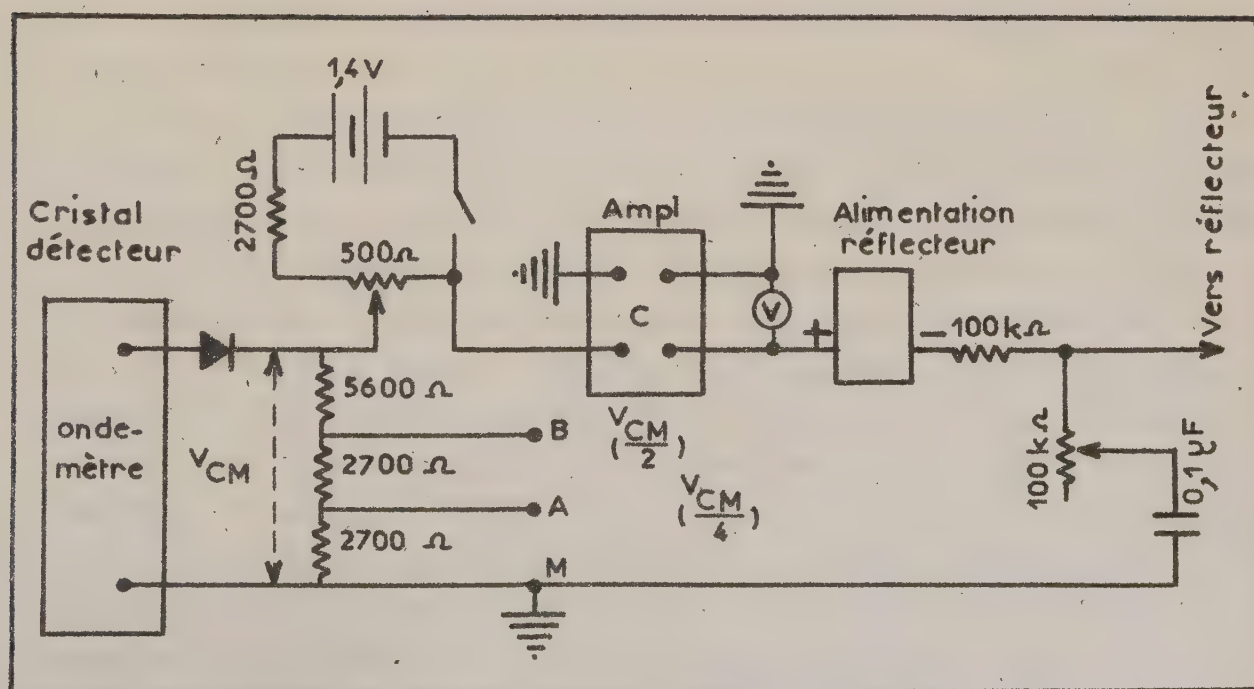


fig. VI\_7



#### D) Fonctionnement

-----

Nous supposons que le klystron a été préalablement réglé pour fonctionner au sommet d'un mode et au voisinage de la fréquence  $f_0$  que nous voulons stabiliser. On cherche alors la résonance de la cavité de référence, en mesurant la tension existant entre les bornes M et A, ou M et B, selon l'importance du signal. On agit ensuite sur le potentiomètre pour régler la tension d'opposition de façon à observer une d.d.p. nulle entre les bornes B et C ; puis on fait croître le gain de l'amplificateur jusqu'à sa valeur maximale. Le voltmètre placé entre les bornes M et A, ou M et B, doit indiquer alors une déviation moitié de celle d'origine.

Le système se place de lui-même, sans intervention manuelle, sur le flanc de la courbe de résonance de la cavité correspondant au fonctionnement stable normal de l'ensemble ; mais il est à noter que la fréquence de fonctionnement diffère de celle donnée par l'étalonnage de l'ondemètre d'une quantité  $df/2$ , si  $df$  est la bande passante de la cavité. Dans notre montage, cet écart est toujours inférieur à 1 MHz, ce qui correspond à une erreur relative de  $10^{-4}$  pour la mesure de la fréquence.

#### E) Résultats

-----

Pour évaluer l'efficacité de notre système, nous définissons deux paramètres : la variation relative de la fréquence  $df_0/f_0$  en fonction du temps et le taux de stabilisation  $df'/df$ ,  $df$  et  $df'$  étant respectivement les écarts de fréquence avec et sans stabilisation.

Considérons un signal appliqué au klystron qui provoque une variation de fréquence  $df' = \lambda ds$ . Si l'on boucle le système par l'intermédiaire de la cavité et de l'amplificateur, l'écart de fréquence devient égal à  $df$ . Aux bornes de l'ondemètre, on obtient le signal  $dV_c = k_c df$ , et à la sortie de l'amplificateur  $GdV_c = Gk_c df$ . Ce signal revient en opposition de phase avec  $ds$  et celui réellement appliqué au klystron est alors  $ds - Gk_c df$ . On a donc :  $df = \lambda(ds - Gk_c df)$  ou  $df = df' - \lambda Gk_c df$ , d'où  $df'/df = 1 + \lambda k_c G$ . Si  $G$  est grand, ce qui est le cas général, on peut finalement écrire :  $df'/df \approx \lambda k_c G$ . Le produit  $\lambda k_c$  représente la pente de l'ensemble klystron-cavité qui peut être mesurée directement de la façon suivante : on augmente la tension du réflecteur d'une quantité  $dV$  et l'on mesure la variation correspondante  $dV_c$  aux bornes du cristal détecteur, le rapport  $dV_c/dV$  donnant la valeur du produit  $\lambda k_c$ . Cette mesure nous a donné un coefficient égal à 0,2200. Connaissant le gain de l'amplificateur qui est de 11000, on en déduit immédiatement le taux de stabilisation  $df'/df = 2420$ .



Nous avons procédé aux mesures de stabilité en utilisant un compteur de fréquence Hewlett-Packard. Les mesures ont été effectuées (44) dès la mise en marche du klystron et sans préchauffage ; puis toutes les 30 minutes durant 4 heures, la cavité étant nue et sans joints d'isolement et d'étanchéité. Cette série de mesures nous a permis de déterminer la stabilité relative que nous avons trouvée égale à  $5.10^{-5}$ . Cette bonne stabilité à long terme est limitée par les variations d'origine thermique ou hygrométrique de la fréquence d'accord de la cavité en laiton soumise aux fluctuations de l'air ambiant. Dans le montage définitif, nous avons donc placé l'ondemètre dans une enceinte thermique isolante, et intercalé entre les brides de raccordement des guides, des lames minces et étanches en mica. Dans ces conditions, la stabilité atteint  $10^{-5}$ , valeur convenable pour nos expériences ; mais il est bon de remarquer que l'utilisation d'une cavité compensée en invar permettrait sans doute d'atteindre  $10^{-6}$ , ce que l'on ne peut songer obtenir avec une cavité en laiton comme celle que nous utilisons, dont le coefficient de dilatation est dix fois plus grand que celui de l'invar.

### III- MODULATION D'AMPLITUDE ET MODULATION ANGULAIRE DU PLAN DE POLARISATION

Ces deux systèmes sont destinés à accroître la sensibilité et la stabilité du montage. La modulation d'amplitude de l'onde émise permet de remplacer l'appareil de mesure à courant continu placé après l'analyseur par un voltmètre alternatif précédé d'un amplificateur sélectif. On obtient ainsi un gain appréciable de sensibilité et une annulation presque complète des dérivés.

De même la modulation du plan de polarisation permet d'utiliser la méthode à une seule antenne et détection de phase que nous avons décrite au chapitre I.

#### A) Modulation d'amplitude

Elle est obtenue en faisant traverser un modulateur à ferrite par l'onde stabilisée en fréquence.

C'est un appareil Micromega XL 400 qui utilise l'effet Faraday.

En première approximation, si l'on appelle  $E$  l'amplitude instantanée de l'onde,  $E_0$  l'amplitude initiale et  $A(i)$  le coefficient d'atténuation du modulateur, nous avons la relation caractéristique du montage suivant :

$$\frac{E}{E_0} = 1 - A(i) \sin^2 \omega t = 1 - A(i) \frac{(1 - \cos 2 \omega t)}{2}$$







ou :

$$\frac{E}{E_0} = \left(1 - \frac{A(i)}{2}\right) \left(1 - \frac{A(i)}{1 - A(i)} \cos 2 \omega t\right)$$

en posant :

$$\frac{A(i)}{1 - A(i)} = m(i), \text{ l'expression donnant l'amplitude de l'onde}$$

devient :

$$E = E_0 \left(1 - \frac{A(i)}{2}\right) (1 - m(i) \cos 2 \omega t), \text{ montrant ainsi qu'elle}$$

est bien modulée en amplitude.

L'appareil de mesure utilisé est un indicateur de TOS Ferisol AG 201, fonctionnant à la fréquence de 1000 Hz. Il faut donc alimenter le bobinage du modulateur à ferrite avec un courant de fréquence = 500 Hz. Les caractéristiques de ce dernier  $R = 0,65 \Omega$ ,  $L = 1,5 \text{ mH}$  entraîneraient un  $\cos \phi$  inadmissible à cette fréquence ; on évite cet inconvénient en réalisant son alimentation à l'aide d'un circuit résonnant série.

Le montage est donné par la figure VI-8, ci-après :

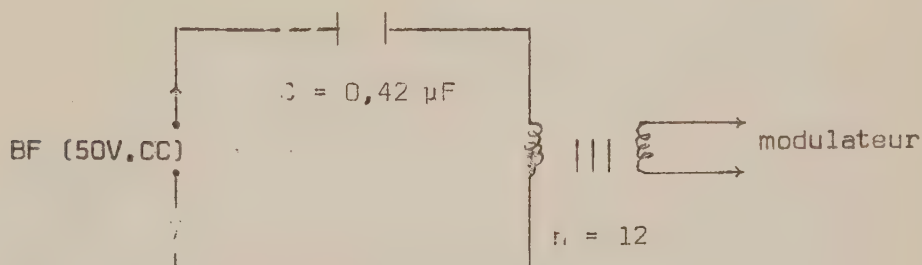


Fig. VI - 8

La figure VI-9 donne le taux de modulation obtenu en fonction de l'intensité de crête traversant le modulateur à ferrite, la mesure ayant été faite à 9200 MHz. En appliquant une tension sinusoïdale de 50 V, crête à crête à notre montage, nous obtenons un taux de modulation de 80 % sans difficulté.

#### B) Modulation du plan de polarisation

Ce dispositif est intercalé dans la ligne de mesure entre le polariseur et la portion du montage contenant l'échantillon étudié. Il est constitué par un élément de guide à section carrée raccordé de part et d'autre aux guides circulaires par des transitions progressives.

Deux lignes hyperfréquences supplémentaires terminées par une diode sont couplées chacune par une petite fente au guide carré.



# Courbe du taux de modulation

$f = 9200 \text{ MHz}$

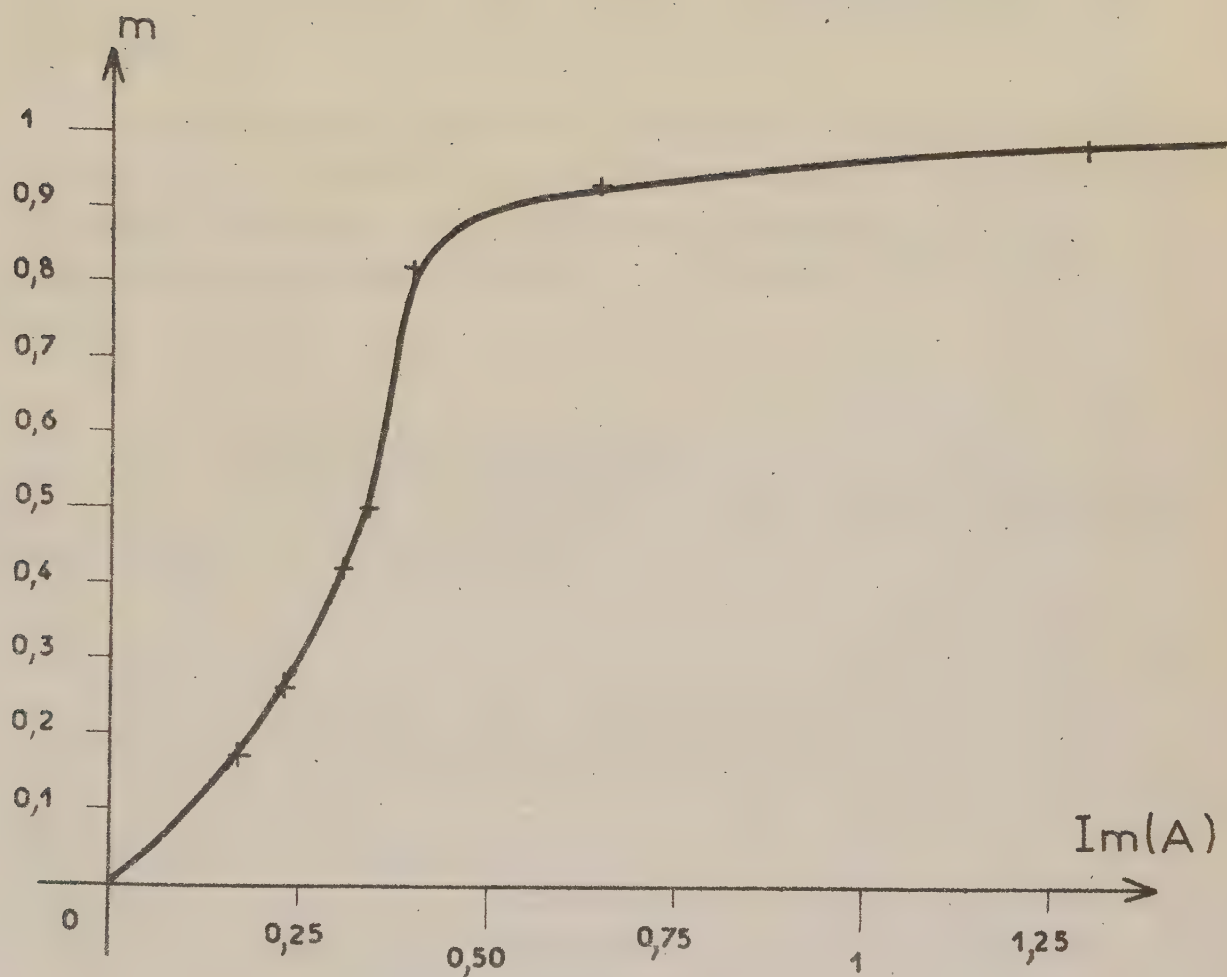


fig. VI - 9

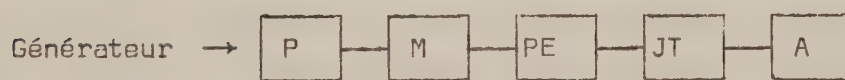


Le couplage s'effectue dans un plan de section droite du guide principal, les lignes étant fixées sur deux faces consécutives. Si l'on place le modulateur de façon à ce que le plan de polarisation de l'onde initiale soit suivant un plan diagonal du guide carré, l'onde se décompose en deux vibrations orthogonales  $TE_{01}$  et  $TE_{10}$ . Si l'on bloque alternativement les diodes placées dans les lignes supplémentaires, leurs coefficients de réflexion varient, entraînant une variation d'amplitude de la composante correspondante.

En appliquant aux diodes des tensions sinusoïdales en opposition de phase, nous avons constaté que la modulation du plan de polarisation était pratiquement sinusoïdale et que l'onde restait pratiquement rectiligne, l'ellipticité supplémentaire apportée par le modulateur n'étant pas mesurable.

#### IV - LE DISPOSITIF PAR TRANSMISSION

Les différents éléments de ce montage, indiqué sur la figure VI - 10, ont été réalisés au Laboratoire.



P - polariseur

M - modulateur

PE - porte-échantillon

JT - joint tournant

A - analyseur

Fig. VI - 10





Nous avons été contraints de fabriquer par galvanoplastie de nombreux éléments tels que : guide d'onde cylindrique, transition guide rectangulaire-guide circulaire, éléments des modulateurs et analyseurs. Nous décrirons ces derniers ultérieurement, puisqu'ils sont utilisés à la fois dans les montages par transmission et par réflexion.

Nous avons choisi un diamètre égal à 22,80 mm pour les guides cylindriques, afin de ne permettre que la propagation du mode fondamental  $TE_{11}$  dans la gamme de fréquence 8500 à 10 000 MHz.

Les jonctions entre chaque élément sont effectuées à l'aide de brides à emboîtement, comportant un piège à ondes, afin d'éviter les perturbations créées par de mauvais contacts électriques entre pièces mobiles (64).

Nous allons étudier successivement les différentes parties du montage.

#### A) Le polariseur

-----

Nous disposons d'une onde guidée se propageant dans un guide rectangulaire standard qu'il faut transformer en une onde polarisée dans un guide cylindrique. Pour cela, nous appliquons cette onde à une transition lente transformant la section rectangulaire du guide initial en une section circulaire. Cette transition permet d'obtenir une onde polarisée dans le même plan que l'onde initiale et présente un taux d'onde stationnaire que nous avons trouvé égal à 1,1. On place immédiatement après, un élément de guide contenant une lame absorbante située dans le plan diamétral perpendiculaire au plan de polarisation. Cet élément permet d'obtenir une vibration polarisée parfaitement rectiligne.

#### B) Le modulateur

-----

Nous l'avons décrit précédemment (§ III - B).

Pour sa réalisation, nous avons utilisé une section de 19,40 mm x 19,40 mm, afin d'avoir la même longueur d'onde guidée dans l'élément central à section carrée que dans les guides cylindriques voisins. Le couplage des lignes coaxiales supplémentaires terminées par des diodes 1 N 23 s'effectue au moyen de deux petites boucles pénétrant légèrement dans le guide par des fentes transversales de 5 mm de longueur.

Nous avons trouvé qu'il fallait appliquer une tension de 1,2 V, crête à crête, à chaque diode, pour obtenir une rotation du plan de polarisation de  $\pm 1^\circ$ .

La fréquence de travail est arbitraire et nous l'avons choisie égale à 1000 Hz.



### C) Le porte-échantillon

C'est une simple section de guide cylindrique où l'on fixe la lame de la substance à étudier. Lorsque l'échantillon présente une section plus petite que celle du guide, on le place dans un support métallique creux épousant sa forme et s'adaptant dans le guide cylindrique.

Un bon contact électrique entre la paroi du guide et le support de la lame est obtenu en employant une suspension colloïdale d'argent. On repère la position de l'échantillon par rapport au plan de polarisation de l'onde incidente à l'aide d'une graduation et d'un vernier gravé sur les brides.

### D) Le joint tournant

Pour étudier la structure de l'onde transmise, il faut pouvoir faire tourner l'analyseur autour de son axe. Ce dernier est monté entre deux paliers et raccordé au guide provenant du porte-échantillon par un joint tournant. Celui-ci permet de faire tourner l'analyseur autour de son axe et de repérer sa position avec précision (figure VI-11). Il comporte un emboîtement à piège des deux guides qui peuvent ainsi tourner l'un par rapport à l'autre, tandis que deux disques gradués de grand diamètre (250 mm), respectivement entraînés par l'une et l'autre partie, permettent une lecture à 20" près. Pour éliminer les effets d'une excentricité toujours présente, la lecture peut se faire sur deux verniers placés diamétralement, tandis que le mouvement est transmis au disque mobile par une butée.

### E) L'analyseur

Nous en avons utilisé plusieurs modèles en raison de leur plus ou moins grande sensibilité et de leur aptitude à travailler à bas niveau. Nous pouvons les répartir en plusieurs catégories, que nous allons examiner successivement :

#### a) Analyseurs différentiels à détection quadratique

Il s'agit d'analyseurs à pénombre présentant une grande analogie avec ceux utilisés en optique classique.

Leur emploi nous paraît être surtout intéressant lorsque l'on étudie des phénomènes d'anisotropie naturelle, sans utiliser la modulation du plan de polarisation.

Après avoir réglé séparément chaque sonde de façon à obtenir la même déviation de l'appareil de mesure lorsque l'antenne considérée est située dans le plan contenant le grand axe de la vibration, la position de l'analyseur correspondant au signal différentiel minimal permet de





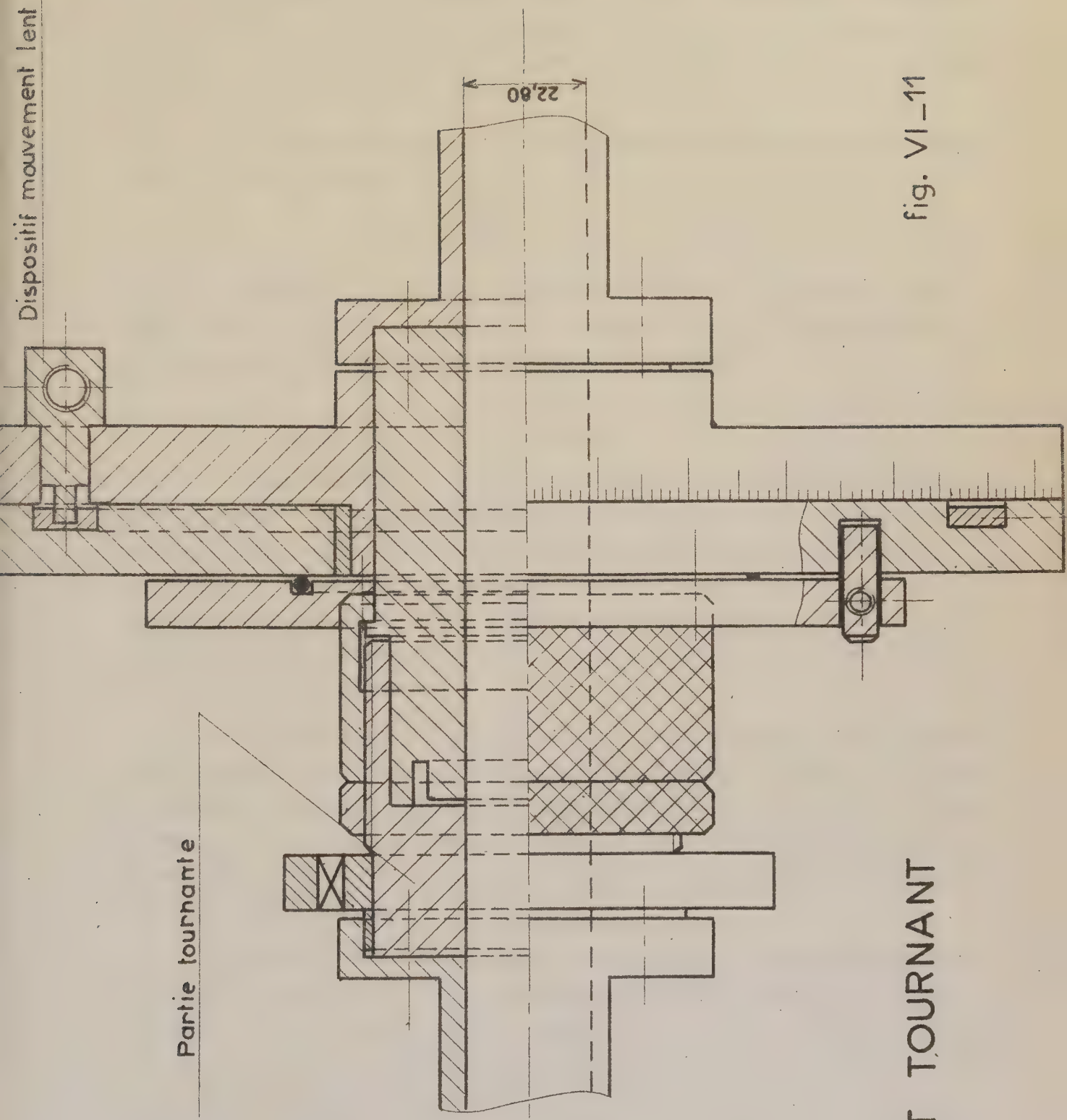


fig. VI\_11

JOINT TOURNANT





repérer la direction de la vibration. L'axe de cette dernière est alors porté par la bissectrice des deux antennes.

La mesure de l'ellipticité peut s'effectuer en mesurant successivement les amplitudes maximale et minimale à l'aide d'une seule sonde, les méthodes par détection de phase n'étant pas utilisables dans ce cas, malgré leur très grande sensibilité (65).

La diode détectrice ayant une caractéristique quadratique, l'ellipticité a pour expression :

$$|e| = \sqrt{\frac{I_{\min}}{I_{\max}}}$$

L'emploi d'un atténuateur étalonné réglant la puissance du générateur permet d'obtenir  $I_{\max} = I_{\min}$  et d'éviter ainsi les erreurs dues au déplacement du point de fonctionnement de la diode.

#### a - Analyseurs à sonde indépendante

La vibration à étudier se propage dans un guide cylindrique sous la forme d'une onde progressive que l'on absorbe au bout du montage à l'aide d'une charge adaptée omnidirectionnelle. Les deux sondes sont identiques et placées orthogonalement l'une à l'autre, dans un plan de section droite du guide. Chacune prélève un signal proportionnel à la projection du champ électrique sur son plan diamétral à l'aide d'une antenne de très courte longueur.

L'antenne excite une ligne coaxiale comportant une diode détectrice à une extrémité et un court-circuit mobile à l'autre. La position de celui-ci doit être telle qu'il ramène une impédance infinie au niveau de la prise d'antenne, tout en assurant la continuité électrique du circuit détecteur. En modifiant légèrement la position des courts-circuits, on peut obtenir une déviation identique pour l'une et l'autre sonde.

Le signal différentiel, mesuré en plaçant un voltmètre entre les deux sorties isolées des diodes détectrices, est proportionnel à l'écart existant entre la position de l'analyseur et celle de la vibration angulaire dans le cas de petits angles. Notre appareil est équipé de diodes détectrices 1 N 23, et nous avons effectué une mesure de sensibilité pour des antennes de 0,1 mm de longueur. Cette dernière est voisine de 52  $\mu\text{V}/^\circ$  pour une vibration incidente de puissance 60 mW. En augmentant la longueur des antennes, il est possible d'accroître la sensibilité du montage, mais il apparaît un couplage entre les deux sondes, phénomène qui a été constaté dans d'autres réalisations (6).



### β - Analyseur à cavité coaxiale unique

Cet appareil est dérivé d'une étude très poussée et d'une réalisation perfectionnée faites auparavant au Laboratoire (7). Il est constitué par une cavité résonnante coaxiale de grand volume, concentrique au guide, où se propage l'onde à étudier. Réalisée avec des rayons intérieur et extérieur de 13,5 mm et 42,5 mm, elle peut fonctionner sur des modes d'ordre supérieur autre que le mode TEM. Parmi ceux-ci, nous avons choisi les modes  $TE_{11n}$ . Le cristal détecteur fournit un signal quadratique correspondant à la somme algébrique des amplitudes des deux ondes orthogonales dans le plan contenant la boucle de couplage. C'est pourquoi le minimum observé pour repérer la position d'une vibration ne peut être nul que si la vibration est rectiligne.

Comme pour l'analyseur précédent, la sensibilité est alors maximale puisque les antennes ont un écart angulaire de  $\pm \pi/4$  avec la direction du grand axe de la vibration. En réglant l'enfoncement des deux antennes, on peut obtenir une sensibilité du même ordre de grandeur que précédemment. Cet analyseur permet également de mesurer l'ellipticité sans avoir à modifier le réglage des deux antennes effectué lors de la mesure de la rotation. En effet, considérons une vibration définie par :

$$x = a \cos \omega t \qquad y = b \sin \omega t$$

Si la diode détectrice se trouve dans le plan  $xOz$ , chaque sonde fait avec  $Ox$  un angle de  $\pm \pi/4$ , et le courant détecté a alors pour expression :

$I_{\min} = k_c b^2$ . Cette mesure peut s'effectuer en même temps que celle de la rotation, puisqu'elle se fait pour la même position angulaire. On tourne alors l'analyseur de  $\pi/2$  et l'on mesure le courant  $I_{\max} = k_c a^2$ , ce qui permet finalement de calculer  $|e| = \sqrt{\frac{I_{\min}}{I_{\max}}}$

#### b) Analyseurs à sonde unique

-----

Malgré leur grande précision de mesure, les analyseurs à pénombre présentent l'inconvénient d'exiger une puissance haute fréquence relativement élevée. En effet, il est nécessaire d'enfoncer très peu les antennes si l'on veut éviter un couplage gênant entre elles, ce que nous avons déjà mentionné.

Pour tourner cette difficulté nous avons pensé utiliser un analyseur à sonde unique.

La détermination du grand axe de la vibration s'effectue à l'aide de deux pointés correspondant au même courant détecté, l'axe cherché étant alors porté par la bissectrice des deux directions. Cette méthode est





malheureusement lente, car il faut déterminer successivement la valeur  $I_{\max}$  du courant détecté, puis les deux positions où le courant a pour valeur  $\frac{I_{\max}}{2}$ .

Il est nécessaire de repérer tout d'abord  $I_{\max}$  car les pointés correspondant à  $\frac{I_{\max}}{2}$ , situés à  $\pm \pi/4$  de l'axe, permettent d'obtenir la meilleure sensibilité.

Il est cependant plus élégant d'utiliser la méthode par modulation du plan de polarisation exposée au chapitre I. Le cristal détecteur est alors connecté à un amplificateur sélectif, puis à un détecteur synchrone (figure VI-12), réglés sur la même fréquence que le modulateur.

La figure VI-13 donne les détails de réalisation de l'analyseur et permet de voir la structure de la ligne détectrice ; c'est une pièce possédant deux plans de symétrie qui est excitée par une antenne placée suivant l'intersection de ces deux plans. Les dimensions de ses sections terminales sont telles qu'elle peut être raccordée à des éléments de guide standard. L'antenne est constituée par un fil de cuivre de diamètre 0,1 mm placé dans un tube capillaire de verre, pour assurer son isolement et une rigidité mécanique suffisante. L'énergie prélevée est acheminée vers la ligne détectrice par l'intermédiaire d'une ligne coaxiale dont l'âme centrale est constituée par le fil de cuivre de l'antenne. La longueur de cet élément est de  $3\lambda/4$  ; celle du fil est égale à  $\lambda$ . Ainsi la cavité est excitée par une antenne quart d'onde, et on peut régler la pénétration de la sonde dans le guide circulaire, à l'aide d'une vis micrométrique.

Les dimensions de la cavité ont été calculées pour que, même dans sa partie la plus large, seul le mode  $TE_{01}$  existe ; sa longueur totale est de  $\frac{5\lambda_g}{2}$ .

Si le système détecteur fonctionne en cavité résonnante, les pertes aux brides de raccordement sont très faibles, car la longueur de la pièce est telle qu'elles sont distantes de  $5\lambda_g/4$  de l'antenne. A une extrémité est fixé le support du cristal détecteur et à l'autre un piston de court-circuit réglable. Nous avons placé l'axe de ce résonateur parallèlement à ceux du guide cylindrique pour des raisons d'encombrement.

#### c) Analyseur à bas niveau d'énergie et à détection linéaire

Les analyseurs précédents n'utilisent qu'une fraction de l'énergie de l'onde progressive existant dans le guide cylindrique, la plus grande partie étant absorbée par la charge adaptée terminant la ligne.

... de la ...  
... de la ...

... de la ...  
... de la ...

... de la ...  
... de la ...  
... de la ...  
... de la ...

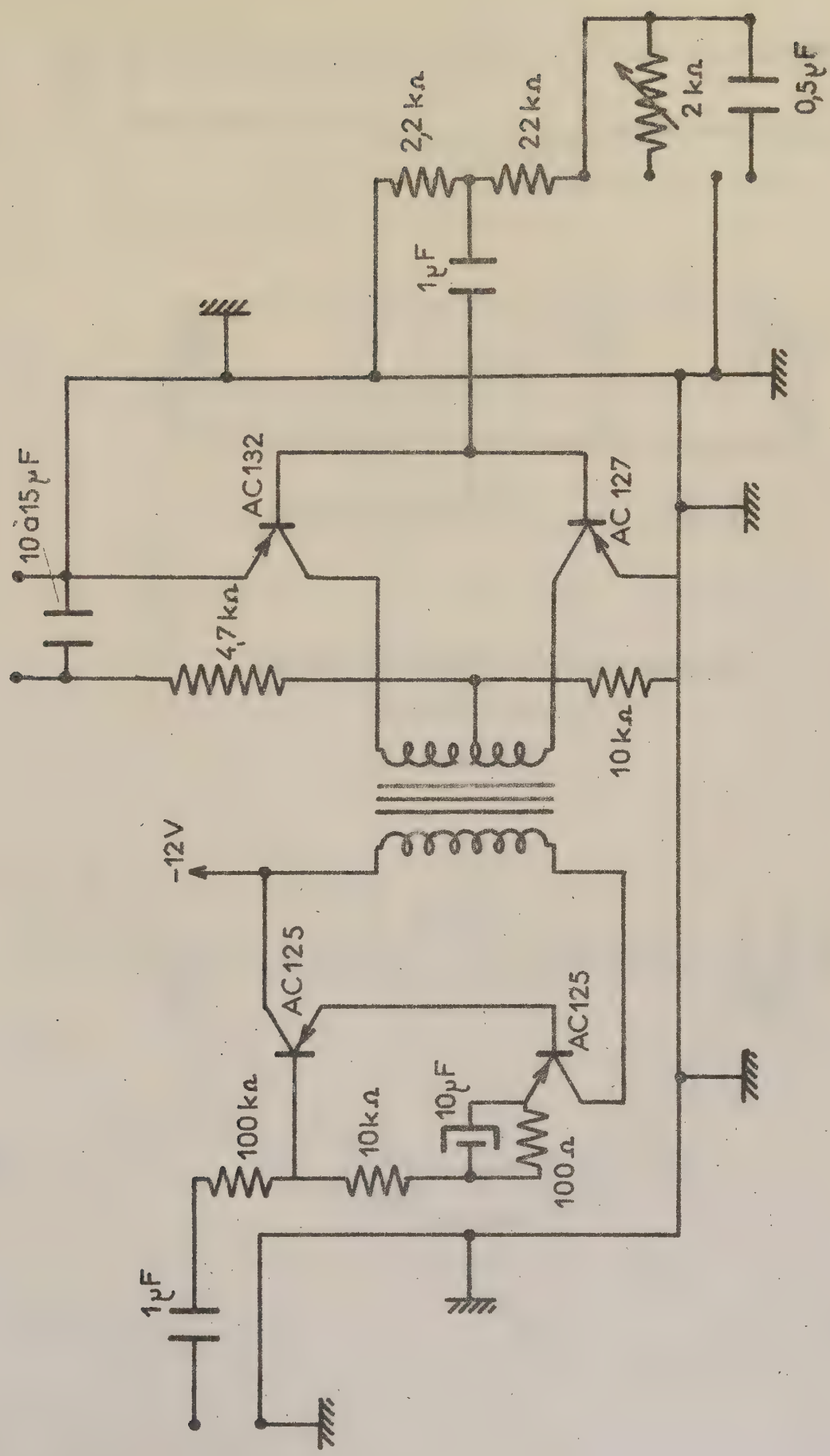
... de la ...  
... de la ...  
... de la ...  
... de la ...

... de la ...  
... de la ...  
... de la ...  
... de la ...

... de la ...  
... de la ...  
... de la ...  
... de la ...

... de la ...  
... de la ...  
... de la ...  
... de la ...





DETECTEUR SYNCHROME

fig. VI-12



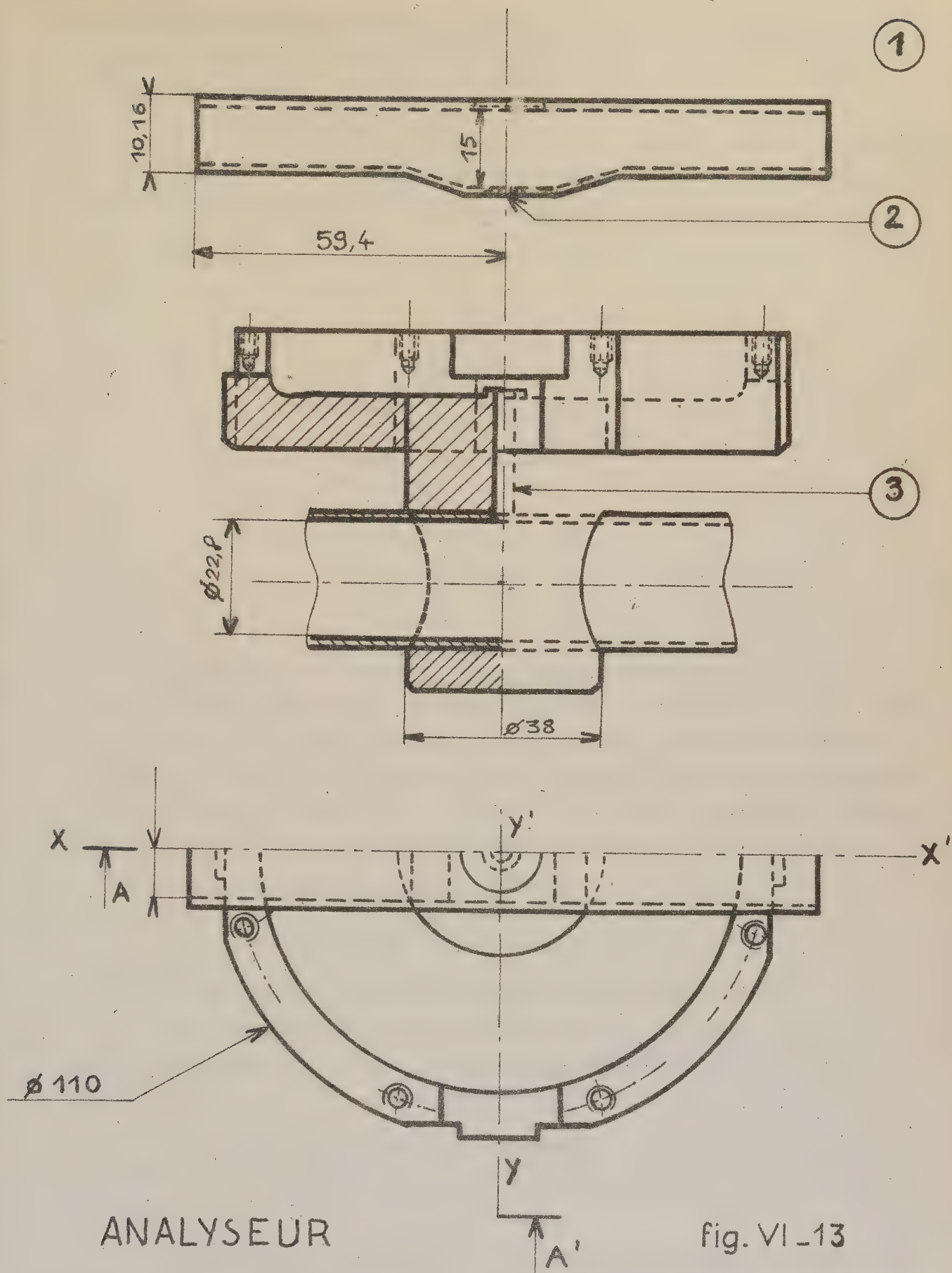


fig. VI-13



Nous avons pensé remplacer ces analyseurs par un montage recueillant toute l'énergie incidente et permettant ainsi de travailler avec des signaux de très faible puissance.

Cet analyseur n'utilise pas d'antenne et sa réalisation (figure VI, 14) rappelle celle d'un té classique dans lequel on aurait remplacé le bras E par un guide de section circulaire, contenant une lame absorbante placée dans le plan  $xOz$ .

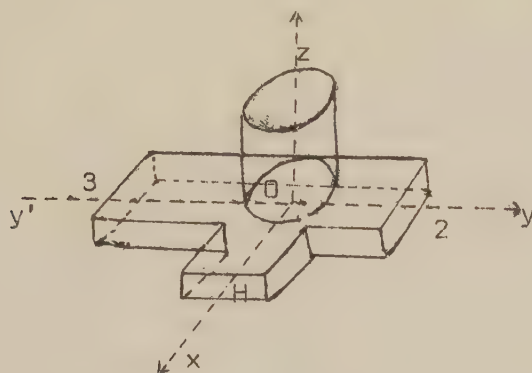


Fig VI - 14

Les bras 2 et 3, reliés à deux systèmes détecteurs adaptables, sont réglés de façon à éviter tout phénomène d'ondes stationnaires dans les guides correspondants. Dans ces conditions, si l'on envoie une onde dans le bras H, l'énergie se partage entre les bras 2 et 3 sans qu'il en apparaisse dans le guide cylindrique. Considérons maintenant la vibration à analyser se propageant dans le guide circulaire et que nous représentons sous la forme :

$$x = A \cos \varphi \cos \omega t + B \sin \varphi \sin \omega t$$

$$y = -A \sin \varphi \cos \omega t + B \cos \varphi \sin \omega t,$$

$\varphi$  étant l'angle du grand axe de la vibration elliptique avec  $Ox$ .

La composante existant dans le plan  $xOz$  est absorbée par la lame conductrice placée dans ce plan ; seule la deuxième composante excite les guides 2 et 3.

Les diodes détectrices recueillent donc la somme ou la différence de la vibration transmise par le guide H et de la composante  $y$  de l'onde à étudier.

L'onde  $A_0$  provenant du bras H peut être, soit de même pulsation que l'onde à étudier, ce qui correspond à un mode de détection du type homodyne, soit d'une fréquence voisine permettant alors une réception par hétérodynage.





Nous avons utilisé la détection homodyne. Les deux diodes détectrices sont identiques et fournissent alors des courants de forme :

$$I = k_0 (A_0 - A \sin \varphi + B \cos \varphi)^2$$

et

$$I' = k_0 (A_0 + A \sin \varphi - B \cos \varphi)^2$$

Les signaux obtenus sont appliqués aux deux entrées d'un amplificateur différentiel PAR 212, et l'on recueille finalement une tension de la forme :  $V = 4 K A_0 (B \cos \varphi - A \sin \varphi)$

Pour  $\varphi = 0$  et  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $V$  représente  $B$  et  $A$  avec la même constante de proportionnalité, tandis que pour une valeur quelconque de l'angle on obtient un signal proportionnel à l'amplitude. Cet analyseur est bien un analyseur linéaire à la différence de ceux déjà décrits. Ce montage peut donc être utilisé comme un analyseur classique, tout en présentant l'avantage de fonctionner avec des signaux très faibles. En effet, on recueille toute l'énergie de l'onde à examiner, ce qui n'est pas le cas avec une antenne faiblement couplée, et l'on bénéficie de l'accroissement de sensibilité de la détection homodyne. Ces signaux correspondent à des rotations et des ellipticités très faibles ( $< 1''$ ), comme celles que nous avons rencontrées dans le cas de cristaux gyromagnétiques faiblement dopés (66).

#### f) Les dispositifs quart d'onde

---

La nature de l'onde électromagnétique ayant traversé l'échantillon rappelle fort celle obtenue en optique lumineuse.

L'étude complète d'une vibration elliptique demande alors l'emploi d'un dispositif équivalent à une lame quart-d'onde. Il est en effet nécessaire de disposer d'un tel appareil si l'on veut vérifier l'état de dépolarisation ou le sens de parcours de l'ellipse.

Les quarts d'onde utilisés au Laboratoire permettent d'obtenir un déphasage de  $\pi/2$  entre les composantes de l'onde émergente, ils sont réalisés à l'aide d'un élément de guide à section approximativement carrée. Dans une telle ligne, pour une onde incidente de pulsation donnée, les modes  $TE_{01}$  et  $TE_{10}$  existent simultanément, mais sont caractérisés par des vitesses de propagation différentes.

Cette section de guide se comporte comme un quart-d'onde si sa longueur  $\ell$  est :

$$\ell = \frac{\lambda_g \lambda_{g'}}{4(\lambda_{g'} - \lambda_g)}$$

Ce dispositif n'est donc quart-d'onde que pour une gamme de fréquences relativement étroite si sa longueur est fixe (7 - 32).



Il demande pour fonctionner correctement que seuls les modes fondamentaux puissent se propager (45).

Nous avons éliminé ces inconvénients à l'aide d'une réalisation mécanique (figure VI - 15), dans laquelle des pièces intercalaires permettent de faire varier la longueur totale, et en choisissant les dimensions de la section rectangulaire. Dans la gamme 8,5 - 10 GHz, une section dont la plus grande dimension n'excède pas 21 mm permet uniquement la propagation des modes fondamentaux ; c'est pourquoi nous avons opté pour une section 10 mm x 20 mm. La figure (VI - 16) montre l'excellence du quart d'onde réalisé que prouvent les mesures de l'ellipticité obtenue pour les vibrations incidentes rectilignes polarisées suivant une diagonale du guide (51).

#### V - LE DISPOSITIF PAR REFLEXION

Ce montage utilise les mêmes éléments pour créer l'onde polarisée, la moduler et l'analyser que le montage par transmission. La différence fondamentale réside dans le circuit où est placé l'échantillon (figure VI, 17).

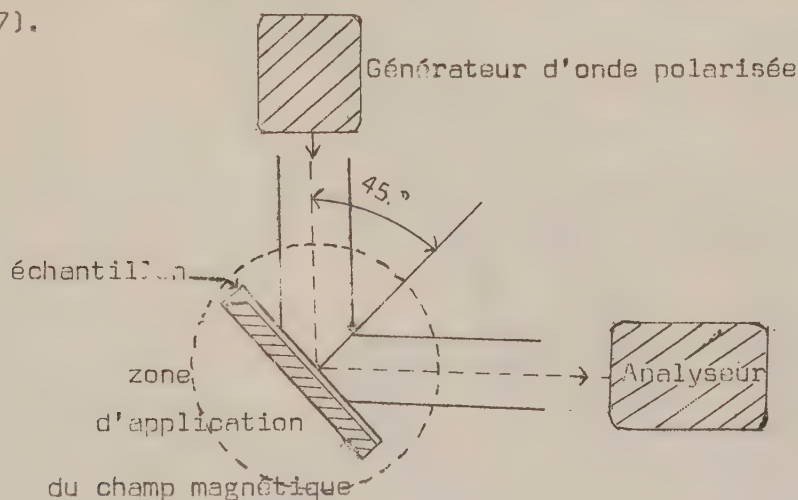


Fig. VI - 17

Pour des raisons mécaniques, nous avons choisi l'angle d'incidence égal à  $\frac{\pi}{4}$  et une section de guide souple permet de faire varier l'angle du plan de polarisation de l'onde avec le plan d'incidence. Les deux guides sont assemblés mécaniquement par l'intermédiaire d'un bloc en laiton, où ils sont enfoncés et soudés. Une fois cette opération réalisée, on usine dans le bloc métallique une face plane, passant par le point d'intersection des axes des guides, faisant un angle de  $\frac{\pi}{4}$  avec chacun d'eux et perpendiculaire à leur plan.

L'échantillon est placé contre le plan métallique ainsi réalisé à l'aide d'un support permettant de l'introduire dans l'entrefer d'un électro-aimant.



QUART D'ONDE

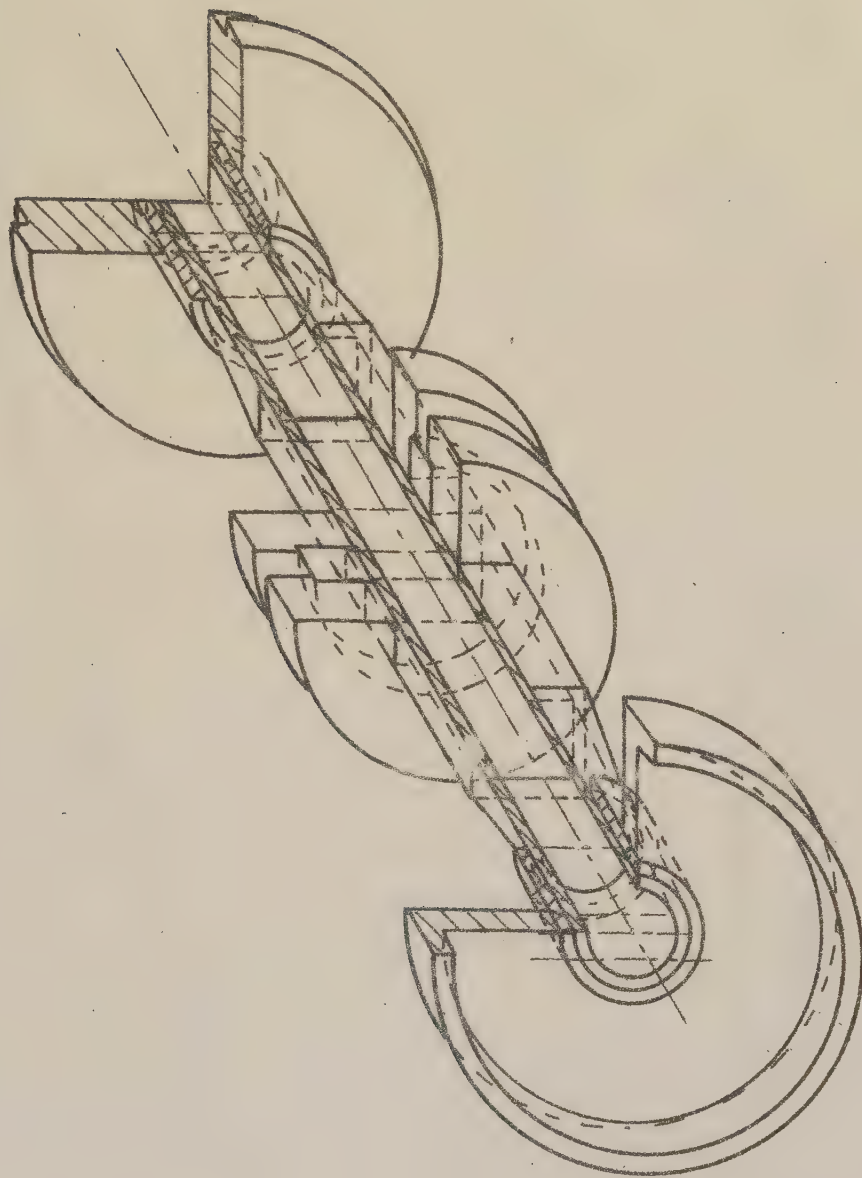


fig. VI -15





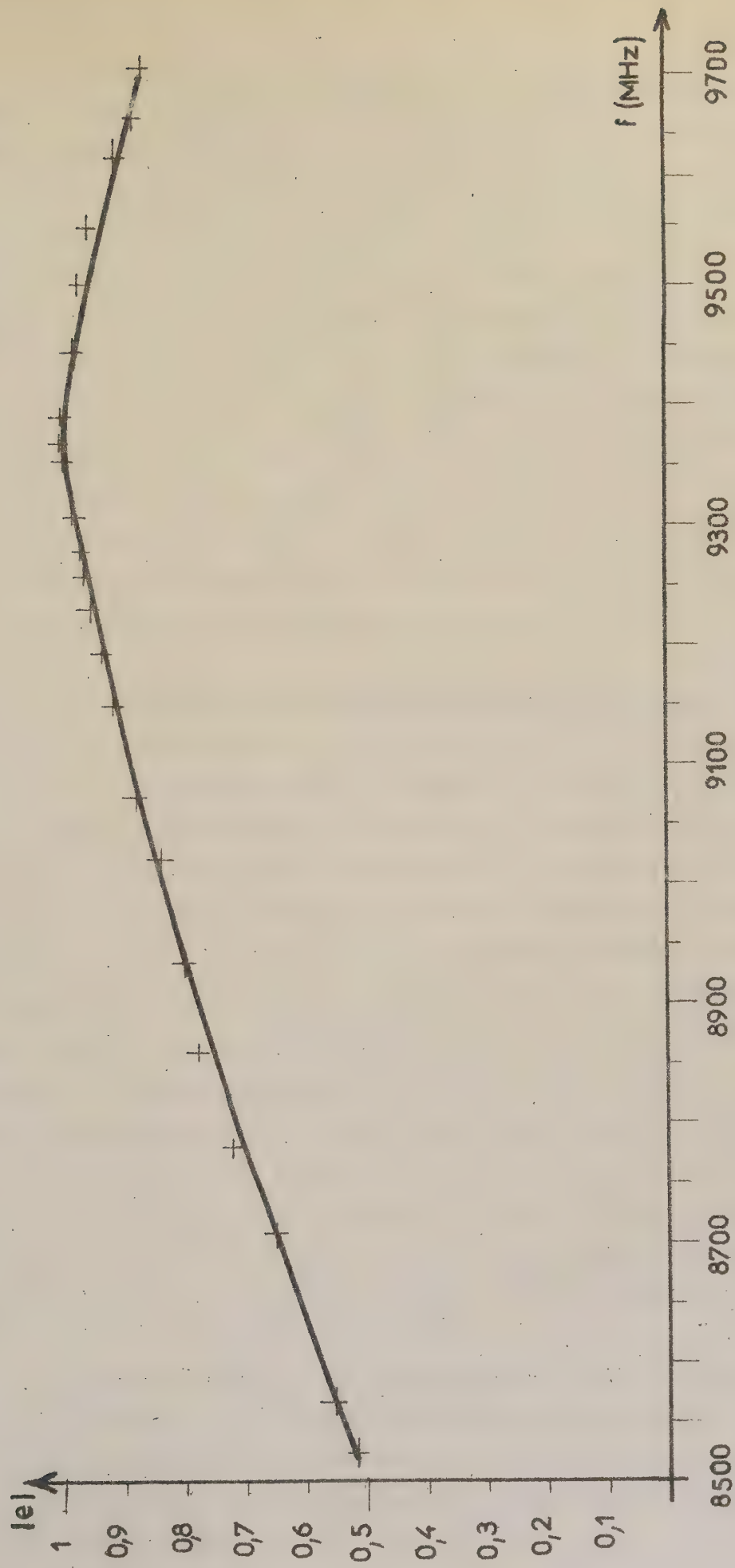


fig. VI\_16 Courbe d'ellipticité (quart d'onde)



Lorsque le phénomène observé est fonction d'un champ appliqué extérieur, on peut tracer point par point les courbes de rotation et d'ellipticité en fonction de ce champ. Cependant, on obtient plus de précision par l'enregistrement graphique des signaux obtenus à la sortie de l'analyseur ou de l'amplificateur qui le suit. Nous avons ainsi employé un potentiomètre enregistreur XY - PHILIPS, dont la voie X était reliée à une résistance permettant d'obtenir une différence de potentiel proportionnelle au courant magnétisant. Les rotations étudiées étant faibles, (de l'ordre du degré) il existe une relation linéaire entre l'amplitude du signal et l'angle de rotation ; un étalonnage préalable permet de tracer directement la courbe de rotation. La mesure de l'ellipticité se fait à l'aide de deux courbes : l'une donnant la valeur maximale du courant détecté au voisinage du grand axe de la vibration, l'autre la valeur minimale au voisinage du petit axe. La première de ces valeurs étant pratiquement constante, il est généralement suffisant d'enregistrer uniquement la deuxième.

#### VI - TECHNIQUE DE FABRICATION DES ELEMENTS SPECIAUX

Nous avons été amené à réaliser la plupart des éléments de nos montages par galvanoplastie (67). Comme pour de nombreux expérimentateurs, l'utilisation de la propagation guidée nous a conduit à réaliser des éléments métalliques creux, bons conducteurs de l'électricité, ayant un excellent état de surface intérieure et de cotes d'autant plus précises que la fréquence de l'onde à propager est plus grande. Ces pièces demandent à être réalisées avec le plus grand soin, si l'on veut éviter des pertes prohibitives d'énergie et des anomalies de propagation. Plusieurs procédés de fabrication peuvent être envisagés ; mais l'impossibilité matérielle de réaliser directement l'usinage intérieur de certaines pièces telles que : transition guide rectangulaire-guide circulaire, équivalent d'une lame quart d'onde, a conduit notre Laboratoire à utiliser, depuis plusieurs années, la galvanoplastie (32 - 43 - 45). Plus récemment, l'extrême précision (0,005 mm) et l'état de surface que doivent présenter les composants destinés aux ondes millimétriques font de la méthode de dépôt électrolytique un moyen de fabrication particulièrement bien adapté (68).

On peut envisager plusieurs méthodes de dépôt électrolytique selon les bains chimiques et la matière des matrices employées. Pour des raisons de simplicité matérielle et d'économie, il a été retenu et mis au point deux méthodes permettant d'obtenir des pièces de solidité et d'état de surface convenables (7).



#### - Galvanoplastie sur plexiglass argenté

La réalisation d'un modèle peut demander une forme de matrice qu'il est difficile de réaliser sur une pièce métallique dans un atelier qui n'est pas spécialement outillé.

De plus, le polissage de la matrice, dont la précision fixe celle de la pièce réalisée, demande bien plus d'efforts et de temps pour un mandrin métallique que pour une matrice en plexiglass. C'est pourquoi un laboratoire qui ne dispose pas de nombreuses machines-outils peut raisonnablement envisager la méthode de galvanoplastie sur plexiglass argenté.

La matrice en plexiglass est façonnée, polie, puis rendue superficiellement conductrice par dépôt d'une mince couche métallique. Parmi tous les métaux, l'argent est le meilleur en raison de sa grande conductivité électrique. Du fait de l'électro-positivité voisine, les deux métaux utilisés, argent et cuivre, présentent une bonne adhérence l'un sur l'autre. L'argenture par voie chimique du plexiglass s'avérant très délicate, il convient d'utiliser soit une peinture à l'argent colloïdal, qui ne donne malheureusement pas une surface brillante, soit une métallisation par évaporation sous vide. En vaporisant 1 g d'argent par  $\text{dm}^2$  à métalliser, on obtient une surface brillante et suffisamment conductrice.

On procède ensuite au dépôt du cuivre dans un bain de sulfate de cuivre ; l'extraction du mandrin s'effectue mécaniquement, puis s'achève par dissolution au chloroforme. On dispose alors d'une pièce dont les parois internes sont argentées.

#### - Galvanoplastie sur duralumin

Pour réaliser un guide spécial, la manière la plus simple consiste à usiner un mandrin de duralumin reproduisant le volume intérieur de la pièce désirée. On réalise un polissage soigné de la pièce et on la soumet à une oxydation anodique dans une solution d'acide sulfurique, afin de la recouvrir d'une couche protectrice d'alumine. Cette opération est indispensable pour diminuer la réactivité chimique de l'aluminium qui risque d'être attaqué par les ions alcalins toujours présents dans les bains ; des réactions chimiques de ce type altèrent fortement l'état de surface du mandrin et par suite le poli et la forme de l'élément fini. Comme précédemment, on effectue le dépôt de la couche de cuivre par électrolyse dans un bain de sulfate de cuivre. Enfin, on sépare la pièce de son support par action de la soude sur l'aluminium, la solution sodique n'altérant pratiquement pas la surface du cuivre.



the first of these is the fact that the system is not self-sufficient. It is necessary to import a large quantity of raw materials and to export a large quantity of finished goods.

The second of these is the fact that the system is not self-sufficient. It is necessary to import a large quantity of raw materials and to export a large quantity of finished goods.

The third of these is the fact that the system is not self-sufficient. It is necessary to import a large quantity of raw materials and to export a large quantity of finished goods.

The fourth of these is the fact that the system is not self-sufficient. It is necessary to import a large quantity of raw materials and to export a large quantity of finished goods.

The fifth of these is the fact that the system is not self-sufficient. It is necessary to import a large quantity of raw materials and to export a large quantity of finished goods.

The sixth of these is the fact that the system is not self-sufficient. It is necessary to import a large quantity of raw materials and to export a large quantity of finished goods.

The seventh of these is the fact that the system is not self-sufficient. It is necessary to import a large quantity of raw materials and to export a large quantity of finished goods.

The eighth of these is the fact that the system is not self-sufficient. It is necessary to import a large quantity of raw materials and to export a large quantity of finished goods.

The ninth of these is the fact that the system is not self-sufficient. It is necessary to import a large quantity of raw materials and to export a large quantity of finished goods.

The tenth of these is the fact that the system is not self-sufficient. It is necessary to import a large quantity of raw materials and to export a large quantity of finished goods.

The eleventh of these is the fact that the system is not self-sufficient. It is necessary to import a large quantity of raw materials and to export a large quantity of finished goods.

The twelfth of these is the fact that the system is not self-sufficient. It is necessary to import a large quantity of raw materials and to export a large quantity of finished goods.



La première de ces deux méthodes présente l'inconvénient d'être longue à effectuer en raison de la métallisation sous vide exigée ; de plus, elle ne permet pas la réalisation sur machines-outils de matrices à des cotes très précises, à cause du manque de dureté du plexiglass. Nous avons donné la préférence à la méthode de galvanoplastie sur duralumin, malgré son imparfaite fiabilité de réalisation et la présence de défauts de surface pouvant atteindre 10  $\mu$ . Nous avons alors entrepris une étude systématique et minutieuse du procédé, qui nous a conduit à mettre au point la méthode que nous allons exposer.

#### A) Matériel utilisé

-----  
Ce matériel comprend :

##### a) une cuve à électrolyse

-----

C'est un récipient en verre ou en matière plastique de forme cylindrique. Nous avons choisi un bac de section circulaire, car c'est la forme qui demande le plus petit volume de solution pour une distance donnée entre la matrice et l'anode. Celle-ci est un cylindre en cuivre rouge placé le long de la paroi de la cuve. Son diamètre est tel qu'une distance de l'ordre de 40 à 50 mm la sépare de la surface du mandrin.

##### b) un dispositif tournant

-----

Si l'on veut obtenir un dépôt de cuivre régulier, il faut donner à la pièce à métalliser un mouvement de rotation durant toutes les phases de la fabrication. Pour cela, nous utilisons un mandrin de perceuse qui permet de serrer la pièce à cuivrer entre ses mors. Le bâti de l'ensemble sert à amener le courant jusqu'au mandrin. Une poulie solidaire du système mobile est entraînée par un moteur asynchrone. Une démultiplication par courroies, isolant le bâti du moteur, permet d'obtenir une vitesse de rotation de l'ordre de un tour par seconde.

##### c) une alimentation en courant redressé

-----

Le système électrique comporte un transformateur donnant une tension de 6,5 volts. Le secondaire alimente un pont de diodes B Y X 21/200. Le schéma du montage est donné par la figure VI-18, ci-après.



Les rhéostats,  $R_1$  de  $8\ \Omega$  et  $R_2$  de  $120\ \Omega$ , permettent de régler l'intensité du courant.

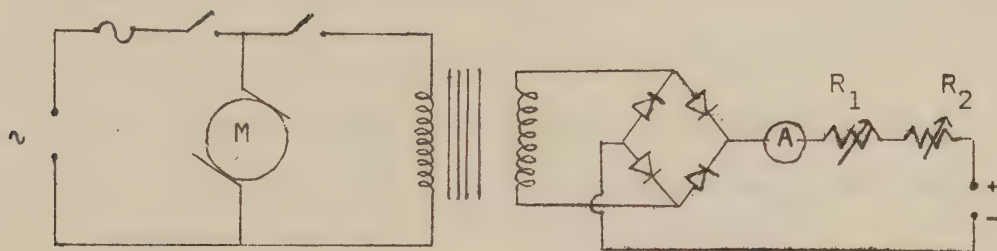


Fig. VI - 18

#### B) Etude du procédé

La méthode employée ne donnant pas toujours de bons résultats reproductibles, nous avons fait toute une série d'essais afin de trouver une meilleure technique opératoire. Nous indiquons, ci-après, les résultats que nous avons obtenus lors de l'étude des différentes phases du procédé de fabrication.

##### a) Confection du mandrin

Il faut que la matrice possède des dimensions très précises et un état de surface se rapprochant autant que possible du poli spéculaire. Le métal utilisé doit donc être à la fois doué d'excellentes propriétés mécaniques et d'usinage, et être apte au polissage. Parmi les alliages d'aluminium, les types les plus indiqués sont les variétés relativement courantes : AU 4G et AG 5, la présence du magnésium favorisant la rectification et le polissage des surfaces.

##### b) Electrolyte

On peut éviter un zingage préalable de la matrice par un choix approprié de l'électrolyte ; mais l'action néfaste des ions alcalins sur elle fait proscrire l'emploi de cyanure de cuivre, qui n'étant pas soluble dans l'eau, est utilisé en solution dans du cyanure de sodium. De plus, une telle solution présente une grande toxicité et la concentration en ions métalliques varie beaucoup lors de l'électrolyse. L'utilisation d'un électrolyte contenant un sel simple de cuivre, comme le sulfate, élimine ces ennuis ; le fait que le dépôt n'est pas adhérent au mandrin d'aluminium (beaucoup plus électro-négatif que le métal déposé) ne peut que faciliter le **démoulage** de la pièce.

1. The first part of the report is a general introduction to the subject of the study. It discusses the importance of the study and the objectives of the research.

2. The second part of the report is a detailed description of the methodology used in the study. It includes information about the sample size, the data collection methods, and the statistical analysis techniques.

3. The third part of the report is a discussion of the results of the study. It presents the findings of the research and discusses their implications for the field of study.

4. The fourth part of the report is a conclusion and a list of references. The conclusion summarizes the main findings of the study, and the references list the sources of information used in the research.

5. The fifth part of the report is a list of appendices. These appendices contain additional information that is relevant to the study but is not included in the main body of the report.

6. The sixth part of the report is a list of figures and tables. These figures and tables provide a visual representation of the data and results of the study.

7. The seventh part of the report is a list of footnotes. These footnotes provide additional information about the study and its findings.

Le bain employé doit posséder un certain nombre de qualités (69) :

- 1°) une grande conductivité, pour éviter un effet Joule important ;
- 2°) une concentration élevée en ions cuivriques ;
- 3°) une bonne stabilité, autorisant un long usage de la solution ;
- 4°) un pH inférieur à 1,2, pour qu'il permette un dépôt de cuivre solide et varie peu lors d'une électrolyse.

Ces considérations nous ont conduit à choisir les deux solutions de composition suivante :

|                     | <u>SOLUTION A</u> | <u>SOLUTION B</u> |
|---------------------|-------------------|-------------------|
| eau pure :          | 1000 cc           | 1000 cc           |
| sulfate de cuivre : | 250 g             | 200 g             |
| acide sulfurique :  | 35 g              | 110 g             |

#### c) Traitement du mandrin par oxydation anodique

-----

C'est pour éviter l'altération de l'état de surface de la pièce que nous procédons à une oxydation anodique préalable, opération dont dépend la qualité et la fiabilité de la fabrication. Elle résulte de la protection du mandrin que réalise la couche mince d'alumine très résistante aux attaques chimiques.

Une grande simplification opératoire est apportée par l'utilisation de la même cuve et du même électrolyte que pour le dépôt, seul le sens de branchement du voltamètre étant inversé, de façon à relier le pôle positif de l'alimentation au mandrin.

Le mandrin étant en rotation, on applique le courant au voltamètre,  $R_1$  présentant sa résistance maximale et  $R_2$  étant en court-circuit ; le rhéostat  $R_1$  est ensuite rapidement ramené à zéro ; l'intensité décroît et se fixe à 180 mA par  $\text{dm}^2$  pour la solution A et à 230 mA par  $\text{dm}^2$  pour la solution B à une température de 20° C.

Nous avons constaté que ces densités de courant doublent toutes les fois que la température s'élève de 8° C.

La couche d'alumine protectrice se forme plus rapidement en présence de la solution B ; elle est dans ce cas plus épaisse mais plus poreuse, tout en ne gênant pas le passage du courant (70).







Une trop longue durée d'oxydation entraîne une attaque du mandrin ; il convient de ne pas dépasser une durée de 2 heures pour la solution A, 20 minutes pour la solution B. Il est recommandé d'effectuer le passage de la phase d'oxydation à celle du dépôt rapidement et sans exposer le mandrin à l'air, ce qui est facile à réaliser puisqu'il suffit d'inverser la polarité du voltamètre. On constate que les matrices renfermant du cuivre (AU4G) se recouvrent d'une couche brillante noire contenant probablement, en plus de l'alumine, de l'oxyde de cuivre, qu'il est possible d'enlever par voie chimique sur la pièce séparée du mandrin.

#### d) Dépôt de la couche métallique

-----

Celui-ci se fait sans difficulté, le grain de cuivre déposé reste fin si l'on opère à une température n'excédant pas 25° C et si l'on utilise une densité de courant de 1,5 A par  $\text{dm}^2$ . Sans trop d'inconvénient pour la finesse du grain, il est possible d'accélérer la formation du dépôt de cuivre en portant au bout de quelques heures cette densité à 3 A par  $\text{dm}^2$ , et en ajoutant à l'électrolyte des additifs organiques spéciaux. L'homogénéité du dépôt exige sa formation ininterrompue et l'emploi d'une solution présentant un pH inférieur à 1,2.

#### e) Vitesse de rotation

-----

Lors de toutes les opérations, le mandrin doit être animé d'un mouvement de rotation si l'on veut obtenir un dépôt régulier. Cette vitesse n'est pas critique et doit être seulement assez lente pour ne pas agiter l'électrolyte. Même pour des pièces comportant des faces planes, la vitesse de 50 tours par minute nous a paru convenir.

#### f) Température

-----

Nous avons opéré à des températures voisines de la température ambiante ; cette dernière n'est pas critique et peut varier sans inconvénient entre 15° C et 25° C.

#### c) Mode opératoire

-----

Des résultats et observations qui précèdent, nous avons déduit le procédé de fabrication que nous utilisons maintenant et dont voici les modalités d'application.

#### a) Obtention de la matrice

-----

Elle est réalisée en alliage léger type AU 4G ou AG 5 par usinage à la machine-outil. Lors de ce travail, on ménage à chaque extrémité de la matrice à cuivrer des surfaces cylindriques et éventuellement



planes ; elles sont recouvertes par deux larges capuchons en plexiglass pour éviter qu'il s'y dépose du cuivre. Elles permettront après l'électrolyse d'usiner la pièce avec précision en offrant la possibilité de centrer et de repérer la position des faces planes lors de sa finition. On procède alors au polissage du mandrin et à son dégraissage au trichloroéthylène puis avec un mélange sulfo-nitrique concentré.

#### b) Oxydation anodique

-----

On effectue ensuite l'oxydation anodique dans la cuve à électrolyse, dont on relie le cylindre de cuivre au pôle négatif de l'alimentation. L'électrolyte sera soit la solution A, soit la solution B.

Avant d'appliquer le courant, on règle les deux rhéostats :  $R_1$  au maximum et  $R_2$  à zéro. On ferme alors l'interrupteur et l'on ramène rapidement, en quelques dizaines de secondes, le rhéostat  $R_1$  à zéro. La durée de l'opération dépend de l'électrolyte employé et de la nature du métal.

La solution A est à utiliser de préférence avec l'alliage AG 5. La durée de l'oxydation anodique est choisie de façon à ce que la quantité de courant traversant le voltamètre soit égale à 120 mA.heure par  $\text{dm}^2$ . A 20° C elle est voisine de 40 minutes. Pour des mandrins de forme tourmentée, risquant de diminuer l'efficacité de l'oxydation anodique, il est souhaitable de porter la quantité de courant utilisé à 180 mA.heure par  $\text{dm}^2$ .

On obtient des résultats analogues avec l'alliage AU 4G, pour lequel la solution B est toutefois préférable.

Cette solution donne une oxydation anodique plus rapide, dont la durée, voisine de neuf minutes seulement, correspond au passage d'une quantité de courant égale à 35 mA.heure par  $\text{dm}^2$ . Si c'est l'alliage AG 5 qui est utilisé avec la solution B, cette durée d'oxydation doit être réduite de 30 %.

Dans le cas où la température, et par suite l'intensité, sont différentes des valeurs données, il convient de modifier la durée de l'opération, afin de respecter les quantités de courant précédemment indiquées.

#### c) Dépôt de cuivre

-----

L'oxydation étant achevée, sans toucher au mandrin, on inverse le branchement électrique et le cylindre de cuivre devient alors l'anode. Il est recommandé de faire rapidement cette opération. On commence alors le dépôt en réglant l'intensité à une valeur d'environ 1,5 A par  $\text{dm}^2$ .



Dans ces conditions, il faut approximativement 200 heures pour obtenir un dépôt suffisant, qui donnera après usinage une paroi de 2 mm d'épaisseur au moins.

#### d) Usinage et finition de la pièce

-----

Grâce aux surfaces de référence, on peut usiner l'extérieur de la pièce, puis, ayant soudé les brides et autres éléments annexes, usiner tout l'ensemble avec une précision de centrage ou de repérage excellente, voisine de 10 $\mu$  sans difficulté.

On évide la mandrin en enlevant le maximum de matière et on assemble de part et d'autre de la pièce un tube en cuivre avec des joints d'étanchéité ; l'ensemble placé verticalement est rempli d'une solution de soude. La réaction est fortement isothermique et il faut veiller à ce que la pièce ne s'échauffe pas trop (au risque de se déformer). La destruction du mandrin achevée, on rince abondamment la pièce et on procède immédiatement à son nettoyage. Il faut opérer sans attendre son séchage, afin de pouvoir enlever facilement par frottement l'hydroxyde de cuivre et les autres résidus qui adhèrent aux parois. Ce travail peut d'ailleurs être encore facilité en le faisant précéder d'un nettoyage chimique à l'acide chlorhydrique concentré, ce qui permet d'obtenir des surfaces polies parfaitement propres.

-:-:-







## CHAPITRE VII

=====

### LE CHAMP MAGNETIQUE

Nous avons étudié précédemment la méthode par réflexion destinée à l'examen des matériaux opaques aux ondes centimétriques. Le dispositif permet l'étude du comportement de substances gyromagnétiques, lorsqu'on les soumet à un champ magnétique. Nous allons donc examiner le dispositif qui nous permet d'obtenir le champ magnétique désiré, qui est obtenu à l'aide d'un électroaimant dans l'entrefer duquel est logé le circuit hyperfréquence et la surface de réflexion (71).

#### I - L'ELECTROAIMANT

Il s'agit d'un électroaimant SIME U 20 dont le circuit magnétique comporte des pièces polaires amovibles. Chacune est constituée d'une âme en acier doux de diamètre 40 mm, qu'entoure un manchon de diamètre extérieur 90 mm. D'après les résultats d'une étude faite au Laboratoire (72) nous avons taillé ces pièces de façon à obtenir la meilleure homogénéité possible. Nous voyons sur la figure VII - 1, ci-après, la forme finalement adoptée.

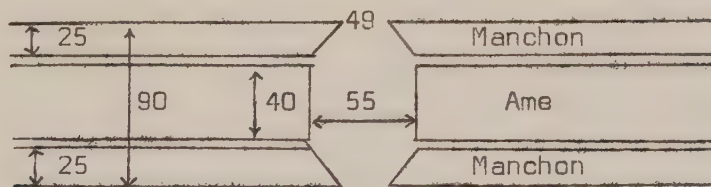


Fig. VII - 1

L'étude expérimentale de l'homogénéité montre qu'elle présente un maximum pour un entrefer de 55 mm, qui est par suite la valeur que nous avons choisie.

Le tracé de la carte du champ magnétique s'effectue en employant le phénomène de résonance magnétique nucléaire (73). De telles cartes ont été tracées pour notre électroaimant dans le cas d'entrefers de largeurs différentes. La figure VII - 2, correspondant à l'entrefer choisi de 55 mm, permet de juger l'homogénéité obtenue. Cette dernière est de  $1,3 \cdot 10^{-5}$  pour un volume de  $10 \text{ mm}^3$  et de  $2,6 \cdot 10^{-4}$  pour  $7 \text{ cm}^3$ .

./...



# Lignes équichamps

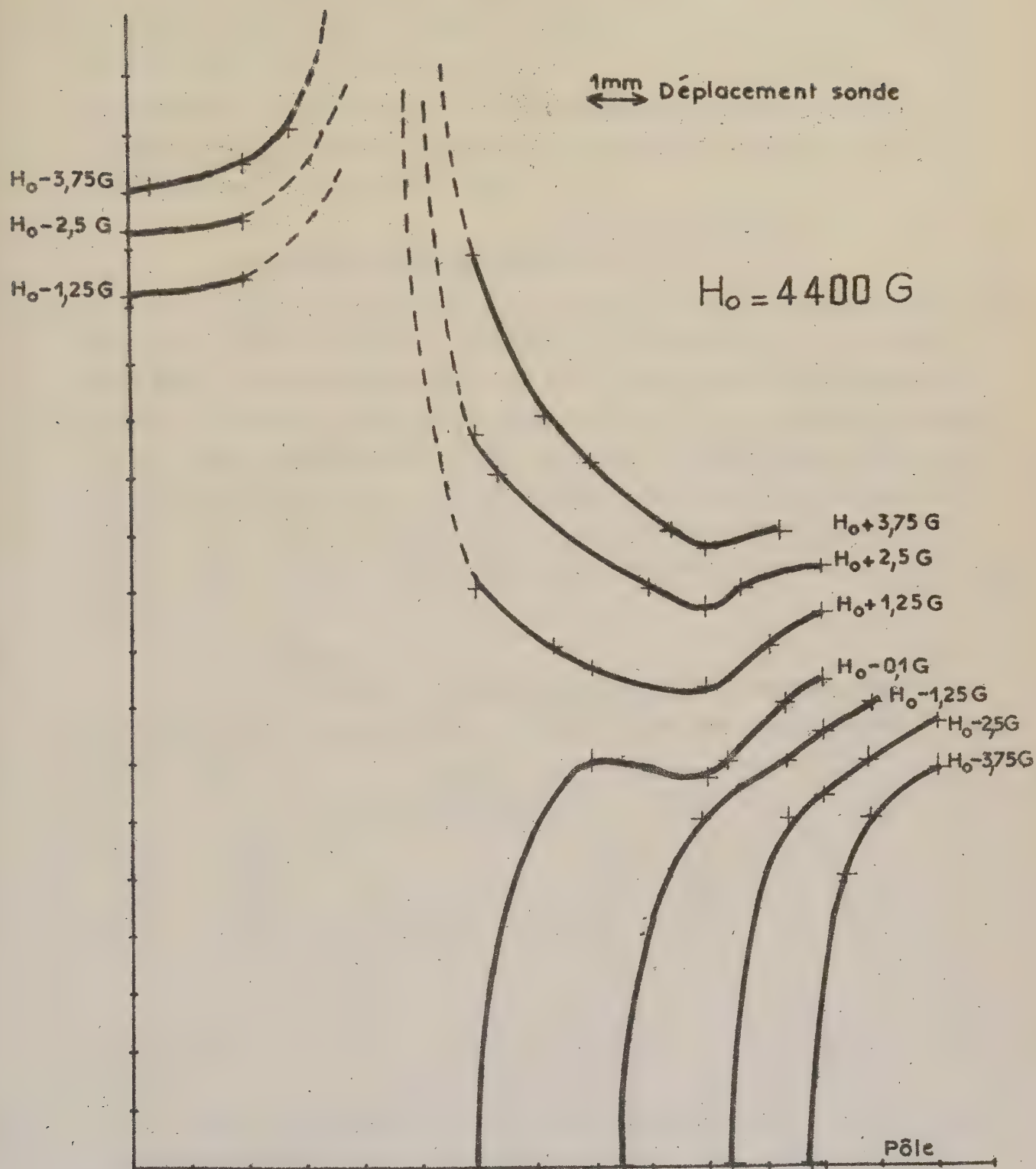


fig. VII - 2



Dans ces conditions, la relation entre le champ créé et le courant magnétisant est linéaire et de pente  $840 \cdot 10^{-4}$  T/A. L'intensité maximale supportée par les enroulements est de 8,5 A, ce qui correspond à un champ magnétique de 0,71 T. La résistance des deux enroulements est de 11,5  $\Omega$  et leur self-inductance de 1,7 H à 50 Hz. L'électroaimant est alimenté par une alimentation régulée Beaudouin, dont nous avons augmenté la stabilité instantanée à l'aide d'un stabilisateur shunt, que nous décrivons dans le paragraphe suivant.

## II - LE STABILISATEUR DE TENSION (74)

Cet appareil totalement indépendant est placé en dérivation aux bornes de l'électro-aimant, et l'on peut faire une analogie de son action avec celle d'un filtre passe-bas. En effet, il n'assure pas de régulation continue du courant, mais atténue très fortement les fluctuations rapides de la tension d'alimentation. Dans notre cas, l'alimentation industrielle que nous utilisons présente une stabilité instantanée relative voisine de  $10^{-2}$  et il est donc indispensable d'adjoindre un stabilisateur de tension pour obtenir un champ magnétique présentant une stabilité convenable égale à  $10^{-4}$ .

### A) Principe

Il nous faut préalablement examiner le fonctionnement de l'ensemble alimentation primaire - électroaimant, dont la figure VII - 3 est donnée ci-après :

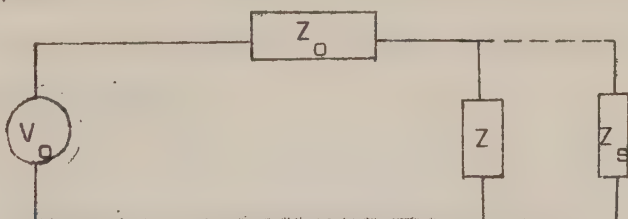


Fig. VII - 3

Nous représentons l'alimentation primaire comme un générateur de force électromotrice  $V_0$  et d'impédance  $Z_0 = R_0 + j X_0$  ; l'électroaimant de résistance  $R_e$  et de self-inductance  $L$ , associé aux éléments  $R$  et  $C$  mis en dérivation ( $R = 80 \Omega$ ,  $C = 2000 \mu F$ ), est représenté par l'impédance complexe  $Z = R + jX$ .

Si l'on appelle  $V$  la tension aux bornes de l'électroaimant, ses variations  $dV$  s'écrivent :

$$dV = dV_0 \frac{Z}{Z + Z_0} \quad (1)$$

./...





La stabilisation est un circuit électronique, placé en shunt sur l'impédance  $Z$ , dont les variations du courant  $I_s$  sont proportionnelles à celles de  $V$ . Il est alors clair que l'effet d'un tel système est d'atténuer les variations de  $V$ .

Nous pouvons considérer le circuit du stabilisateur comme un élément actif de pente  $S$  et de résistance interne  $r$ , auquel est appliquée la tension  $V$ . Nous pouvons alors écrire :

$$dI_s = (S + \frac{1}{r}) dV$$

Le stabilisateur se comporte comme une impédance  $Z_s$  placée en dérivation sur  $Z$ , définie par la relation  $Z_s = \frac{dV}{dI_s}$ , ce qui donne :

$$Z_s = \frac{1}{S + \frac{1}{r}}$$

La nouvelle valeur  $dV_s$  de la variation de tension aux bornes de l'électroaimant s'obtient en remplaçant, dans l'expression (1),  $Z$  par l'impédance équivalente aux impédances  $Z$  et  $Z_s$  en parallèle :

$$dV_s = \frac{dV_o}{1 + \frac{Z_o}{Z} + \frac{Z_o}{Z_s}}$$

Les variations de la tension  $V_s$  diminuent lorsque  $Z_s$  décroît ; comme  $Z_s$  diminue lorsque la pente du stabilisateur augmente, la stabilisation sera d'autant meilleure que  $S$  sera plus grand. On peut alors caractériser l'efficacité du stabilisateur par le coefficient de stabilisation :

$$K = \frac{\text{module } dV}{\text{module } dV_s}$$

$$\text{soit : } K = \text{module} \left| 1 + \frac{Z_o Z}{Z_s (Z_o + Z)} \right|$$

Dans cette expression, le terme  $\frac{Z_o Z}{Z_o + Z}$  représente l'impédance équivalente aux impédances  $Z_o$  et  $Z$  mises en parallèle. Si nous appelons cette impédance  $Z_p$ , l'expression de  $K$  devient :

$$K = \text{module} \left| 1 + \frac{Z_p}{Z_s} \right|$$

Lorsque le courant magnétisant est fourni par une alimentation régulée en intensité, l'expérience montre qu'alors l'impédance  $Z_o$  de l'alimentation est très grande par rapport à  $Z$  (pour les alimentations régulées dont nous disposons au laboratoire,  $Z_o \approx 1000 \Omega$  et  $Z \approx 10 \Omega$ ) ;



on peut confondre  $Z_D$  avec  $Z$ .

$$K = \text{module} \left| 1 + \frac{Z}{Z_S} \right|$$

$Z_S$  dépend de la pente et de l'inverse de la résistance interne du stabilisateur ; on constate que  $\frac{1}{r}$  est pratiquement très petit par rapport à  $S$  ( $S \approx 350 \Omega^{-1}$  ;  $\frac{1}{r} \approx 10^{-4} \Omega^{-1}$ ) et l'on peut confondre  $Z_S$  avec  $\frac{1}{S}$ . L'expression de  $K$  devient alors :

$$K = \text{module} |1 + S.Z|$$

Le coefficient  $K$  caractérise l'efficacité du stabilisateur de tension et il est intuitif de penser que la stabilité du champ magnétique croît lorsque  $K$  augmente. Pour mieux exprimer cette relation, nous définissons un coefficient  $k$  de stabilisation en intensité ou en champ. Ce coefficient  $k$  se définit comme le rapport, pour une perturbation de fréquence donnée, de la variation du champ sans stabilisation à la variation en période de stabilisation. Il est facile de lier ce coefficient à  $K$ , car, pour une fréquence donnée, l'impédance  $Z_e$  de l'électroaimant seul étant constante, nous avons :  $I = \frac{V}{Z_e}$ .

Cette relation de linéarité nous permet alors d'écrire :

$$k = K = \text{module} |1 + S.Z|$$

#### B) Circuit utilisé (figure VII - 4)

Pour procéder à l'étude du stabilisateur, nous le décomposons en ses éléments simples :

- a) le circuit RC d'entrée ;
- b) l'amplificateur de commande ;
- c) les transistors stabilisateurs.

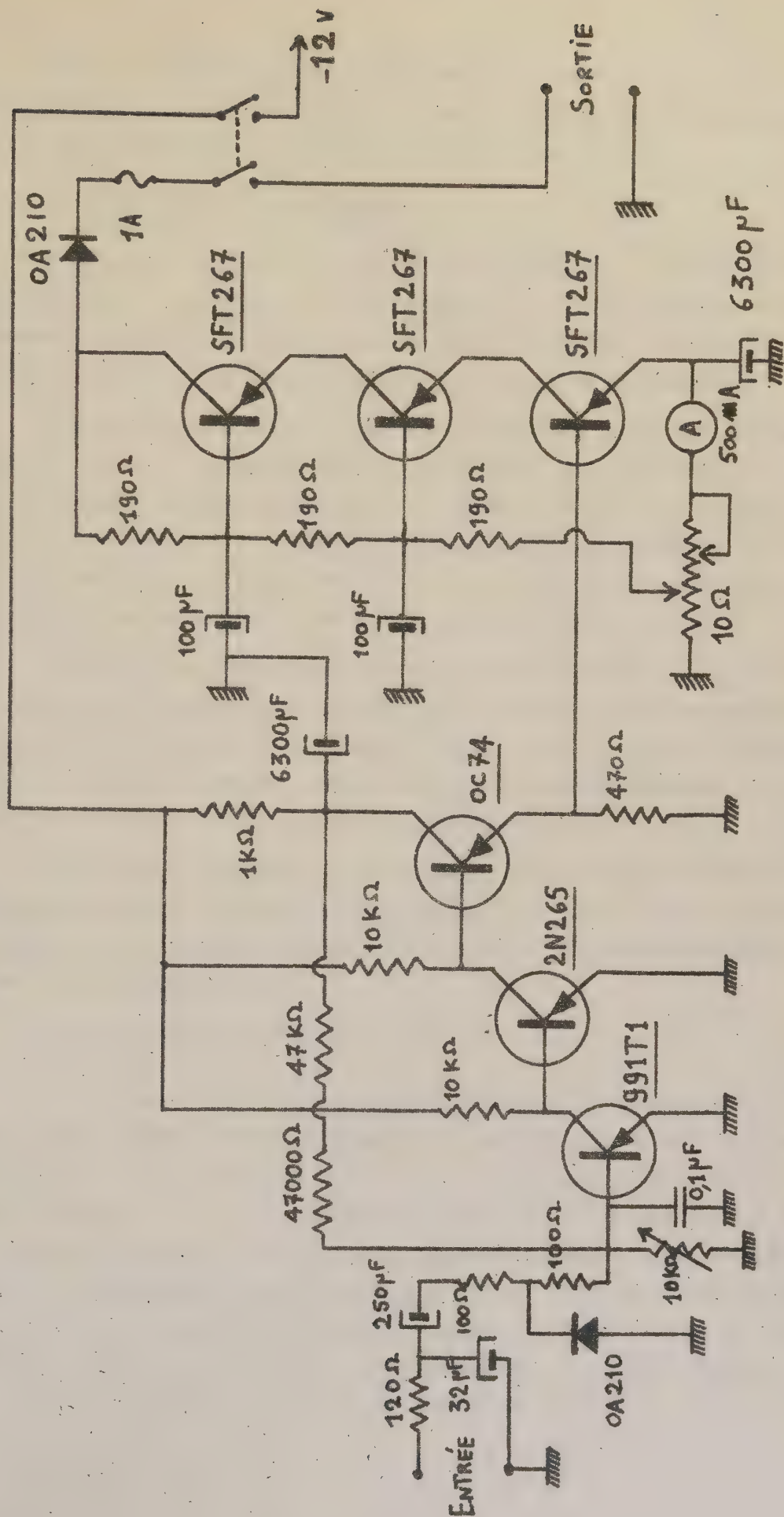
##### a) Le circuit RC d'entrée

Nous n'appliquons pas directement à l'amplificateur la tension à corriger prélevée aux bornes des enroulements magnétisants ; la transmission s'effectue au travers d'une cellule passe-bas RC qu'exige le critère de stabilité de BODE. Cette cellule RC limite la bande passante, l'atténuation restant inférieure à 12 dB/octave.



# STABILISATEUR SHUNT

Fig. VII - 4







Elle est constituée d'un condensateur de capacité de 32  $\mu\text{F}$  et d'une résistance de quelques dizaines d'ohms, dont on ajuste expérimentalement la valeur pour obtenir un fonctionnement stable.

b) L'amplificateur de commande

-----

Le signal obtenu à la sortie de la cellule RC est appliqué à un amplificateur à transistors à trois étages. Le circuit d'entrée est du type passe-haut CR, dont la résistance variable de 10 000  $\Omega$  permet d'annuler la tension appliquée à la base du premier transistor amplificateur.

En opérant ainsi, lors de la mise en service de l'alimentation primaire, on évite la variation brutale du courant du stabilisateur lorsqu'une tension apparaît aux bornes de l'électroaimant. Cette protection est doublée d'un dispositif électronique formé de la diode OA 210 et de deux résistances associées qui limitent le signal dès que celui-ci dépasse la tension directe de la diode, c'est-à-dire, 0,5 V environ.

L'amplificateur comporte les transistors : 991 T1, 2N 265 et OC 74. Les liaisons entre étages sont directes, et nous avons choisi le montage "émetteur commun" pour les deux premiers, tandis que le dernier étage est un montage "collecteur commun", afin d'avoir une faible impédance de sortie, convenant à la commande des transistors stabilisateurs.

La stabilité thermique du montage est obtenue par un circuit de contre-réaction fixant le point de repos du premier étage. Nous maintenons ainsi constant le courant du transistor de sortie, ce que permettent les liaisons directes entre étages.

c) Les transistors stabilisateurs

-----

Cet ensemble est monté en dérivation sur les enroulements magnétisants et, par suite, prélève une partie du courant fourni par l'alimentation primaire. Comme ce stabilisateur n'est destiné qu'à atténuer les variations résiduelles de la tension aux bornes des enroulements, il ne nous a pas paru nécessaire d'absorber une puissance importante par rapport à celle de l'électroaimant, qui est de l'ordre de 1 KW. Nous nous sommes donc arrêtés à une puissance d'environ 40 W, qui n'est d'ailleurs atteinte que lorsqu'on règle le courant de l'électroaimant à sa valeur maximale.

La pente du montage atteint la valeur de 350 A/V.



### C) Mesure du coefficient de stabilisation

---

Pour tracer la courbe expérimentale du coefficient de stabilisation en fonction de la fréquence du signal à corriger, il faut moduler la tension d'alimentation de l'électroaimant et effectuer deux mesures de l'ondulation à ses bornes, l'une sans stabilisation, l'autre avec stabilisation.

Nous avons pensé moduler le courant fourni par l'alimentation régulée Beaudouin, en faisant varier sinusoïdalement sa tension de référence.

Malheureusement, cette alimentation utilise un servo-mécanisme à inductances à fer saturé, dont l'inertie interdit toute modulation. Pour juger cependant des performances de ce stabilisateur de tension, nous avons évalué l'atténuation de l'ondulation qu'il procure en l'examinant à l'aide d'un oscilloscope cathodique.

On a pu ainsi estimer que l'on améliore d'environ 100 fois la stabilité instantanée en utilisant le stabilisateur shunt.

## III - LE STABILISATEUR DE FLUX MAGNETIQUE

C'est un montage à réaction négative où le champ de correction est créé par un courant que les lois de l'induction exigent d'être proportionnel à l'intégrale du signal induit dans les bobines réceptrices placées sur les pièces polaires.

Pour résoudre ce problème, nous avons mis au point et utilisé un dispositif d'intégration thermique non classique (75).

Ce stabilisateur tend à maintenir constant le flux magnétique et de ce fait, donne une stabilisation directe du champ. Il est ainsi indépendant des autres dispositifs régulateurs utilisés. Sa réalisation nécessite l'installation de bobines sur les pièces polaires. Il assure une compensation maximale du champ magnétique d'environ  $10^{-4}$  T.

### A) Le montage stabilisateur (76)

---

#### a) les bobines réceptrices

---

Elles sont constituées de deux enroulements placés symétriquement sur les pôles de l'électroaimant de part et d'autre de l'entrefer. Leur faible volume leur permet de ne recueillir que le flux magnétique à corriger.



Elles ont pour dimensions :

- diamètre extérieur : 100 mm
- diamètre intérieur : 90 mm
- largeur : 20 mm
- nombre de spires : 4500
- diamètre du fil émaillé : 0,1 mm

et les deux bobines en série ont pour caractéristiques électriques :

- $R = 5900 \Omega$
- $L = 19 \text{ H}$
- capacité répartie : 27 pF
- fréquence propre de résonance : 7000 Hz.

b) Les bobines de correction

-----

Elles sont constituées de deux enroulements, placés symétriquement sur les pôles de part et d'autre de l'entrefer, coaxiaux avec les bobines réceptrices et dont un système mécanique permet de régler l'écartement.

Elles ont pour dimensions :

- diamètre extérieur : 170 mm
- diamètre intérieur : 100 mm
- largeur : 10 mm
- nombre de spires : 12 500
- diamètre du fil émaillé : 0,15 mm

et les deux bobines en série ont pour caractéristiques électriques :

- $R_1 = 11\,000 \Omega$
- $L_1 = 80 \text{ H}$
- capacité répartie :  $C_1 = 37 \text{ pF}$
- fréquence propre de résonance : 2 900 Hz
- sensibilité :  $1,5 \times 10^{-4} \text{ T/ mA}$ .





c) le dispositif électronique d'asservissement (figure VII - 5)

-----

a - l'amplificateur

Il comprend un amplificateur de tension suivi d'un amplificateur de puissance.

Afin de diminuer le gain aux fréquences élevées, ce qui serait une cause d'accrochage au voisinage de la fréquence de résonance propre des bobines de correction, l'entrée de l'amplificateur est shuntée par une capacité de  $0,2 \mu\text{F}$ .

D'autre part, pour éviter les surtensions importantes aux bornes des bobines réceptrices, lors d'une coupure du courant de l'électroaimant, l'entrée de l'amplificateur est shuntée par deux diodes de protection montées en sens inverse.

Le signal entre alors sur la base d'un transistor BCZ 11 monté en collecteur commun, dont l'émetteur attaque directement la base d'un SFT 357 ; on obtient ainsi une impédance d'entrée élevée ( $200 \text{ K}\Omega$ ).

L'amplificateur lui-même est réalisé avec trois transistors SFT 357 montés en émetteur commun et en liaison directe. On a été conduit à choisir des transistors HF, afin d'éviter les rotations de phase dues à leurs capacités internes.

Un circuit de contre-réaction assure la stabilité thermique de l'ensemble, tandis qu'une résistance ajustable de  $1000 \Omega$  en série avec un condensateur de  $25\,000 \mu\text{F}$  règle le gain de manière à garantir la stabilité de fonctionnement.

Deux transistors en liaison directe constituent l'amplificateur de puissance qui alimente la lampe à incandescence de l'intégrateur.

Lorsqu'il n'y a pas de signal sur les bobines réceptrices, la lampe est traversée par un courant de repos ajusté à  $180 \text{ mA}$  au moyen du potentiomètre de  $5\,000 \Omega$ . Un milliampèremètre en série dans le circuit permet d'en contrôler la valeur.

La résistance à collier de  $1\,000 \Omega$  réglée à  $350 \Omega$ , insérée entre les transistors 2N 338 et OC 30, limite le courant à  $250 \text{ mA}$ , évitant ainsi la destruction du filament de la lampe.

La pente de tout l'ensemble a été mesurée à  $50 \text{ Hz}$  et trouvée égale à  $4 \text{ A/V}$ .









### $\beta$ - l'intégrateur (77)

Il est simplement constitué d'une lampe à incandescence de faible capacité calorifique et d'une photodiode PH 61. La lampe utilisée est une lampe lentille de 2,25 V - 0,25 A, dont la masse du filament  $M = 5$  mg et le coefficient de refroidissement  $K = 10^{-4}$  W/°C ont été déterminés expérimentalement.

L'ensemble est placé dans une enceinte fermée à l'abri des perturbations dues aux rayonnements extérieurs.

Lors de notre étude, nous avons réglé le courant de repos dans le filament à 180 mA de façon à avoir  $T_0$  voisin de 1500° K et un courant de repos dans la photodiode de 0,55 mA. La figure VII - 6 donne les résultats obtenus pour les fréquences 50, 20, 5 et 2 Hz. Elle permet de constater que l'intégration n'est excellente que pour les deux premières fréquences ; l'évolution de la forme du signal montre, lorsque la fréquence décroît, que l'on passe progressivement du régime d'intégration au régime de transmission simple, que l'on atteindrait pour les fréquences inférieures à 2 Hz. La valeur numérique du déphasage, exprimée en fonction de la fréquence dans les conditions de notre expérience ( $\tan \Phi = 0,44 f$ ), correspond bien aux résultats trouvés.

### $\gamma$ - le circuit de correction

Une pile de 27 V alimente la photodiode et les bobines de correction. Deux diodes assurent la protection du système contre les surtensions qui pourraient naître lors d'une rupture imprévue du courant d'alimentation de l'électroaimant. Un avantage important de ce système d'alimentation des bobines consiste en l'absence presque totale de bruit de fond.

### B) Etude générale du servomécanisme

#### a) Etude du circuit d'entrée

-----  
Ce circuit est composé :

$\alpha$  - des bobines réceptrices de résistance  $R$  et de self-inductance  $L$ , dans lesquelles est induite la force électromotrice  $e_0$  due à la variation du champ  $B$ .

$\beta$  - de la résistance d'entrée  $R_a$  de l'amplificateur

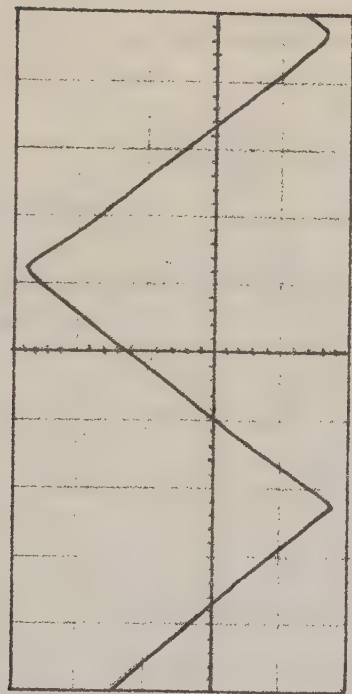
$\gamma$  - de la capacité  $C$  placée à l'entrée de l'amplificateur (les capacités parasites étant négligeables devant cette dernière).

./...

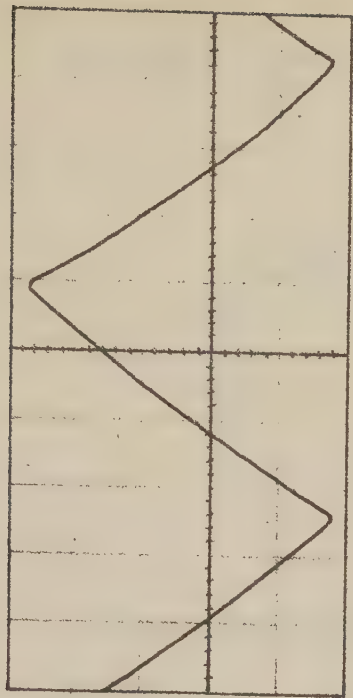




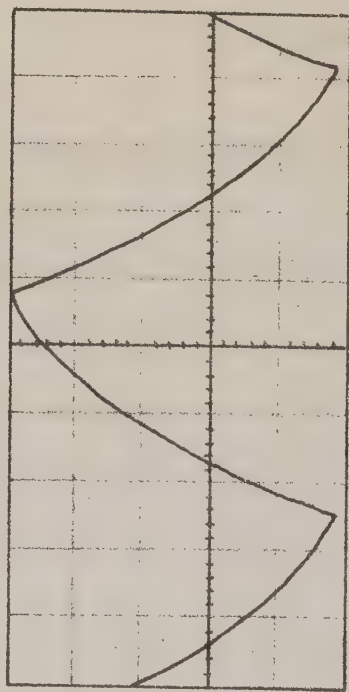
# INTEGRATION THERMIQUE



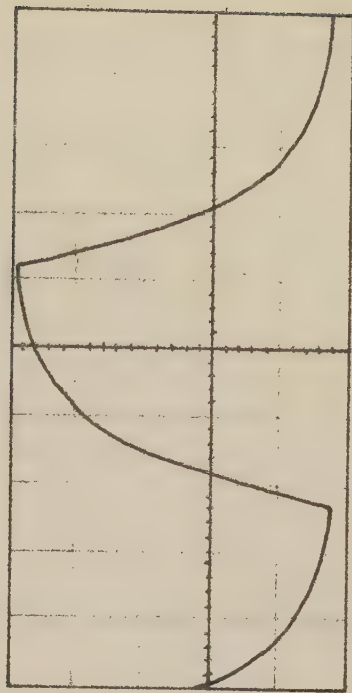
50 Hz



20 Hz



5 Hz



2 Hz

fig. VII - 6



Cet ensemble est représenté par la figure VII - 7, ci-après :

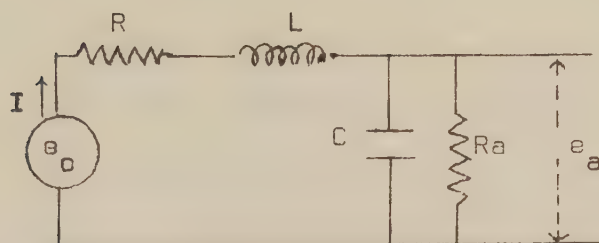


Fig. VII - 7

Calculons la tension  $e_a$  apparaissant à l'entrée de l'amplificateur.

On obtient :

$$e_a = e_o \times \frac{1}{1 + (R + j L \omega) (j C \omega + \frac{1}{R_a})}$$

Le champ magnétique dans l'électroaimant peut s'écrire sous la forme :  $B_M + B_o \cdot e^{j\omega t}$   
 ( $B_M$  étant la valeur moyenne du champ,  
 et  $B_o \cdot e^{j\omega t}$ , la perturbation à corriger, que nous supposons **sinusoïdale**).

On a :

$$e_o = - NS \frac{dB}{dt} \quad (NS \text{ étant la surface équivalente des bobines réceptrices}).$$

Soient  $E_o$  et  $E_a$  les amplitudes complexes respectives des différences de potentiel  $e_o$  et  $e_a$ .

$$E_o = - NS j\omega B_o$$

$$E_a = - \frac{NS j\omega B_o}{1 + (R + j L \omega) (j C \omega + \frac{1}{R_a})}$$

#### b) Etude de l'amplificateur

-----

Il est caractérisé par la pente  $s$ , le courant  $I_\ell$  dans la lampe est donné par la relation  $I_\ell = s \times E_a$ . Dans la bande de fréquences qui nous intéresse (1/10 Hz à 500 Hz), une étude expérimentale montre que la pente est constante et que le déphasage est inexistant. Ceci se traduit en exprimant la pente  $s$  par un nombre réel :

$$I_\ell = - \frac{s NS j\omega B_o}{1 + (R + j L \omega) (j C \omega + \frac{1}{R_a})}$$



## c) Etude de l'intégrateur

-----

Nous rappelons l'équation différentielle de l'intégrateur (77)

$$C_t \frac{dT_s}{dt} + \frac{T_s}{R_t} = W_s$$

$C_t$  = capacité thermique,

$R_t$  = résistance thermique,

$W_s$  = puissance du signal,

$T_s$  = variation de température.

Pour notre montage nous avons :

$$W_s = 2 R_\ell I_o I_\ell$$

$R_\ell$  étant la résistance de la lampe et  $I_o$  le courant de repos (grand devant  $I_\ell$ ).

$I_\ell$  étant une fonction sinusoïdale du temps,  $T_s$  l'est aussi et peut s'écrire :

$$T_s = T \cdot e^{j\omega t} \quad T \text{ étant son amplitude complexe.}$$

L'équation différentielle devient :

$$(j\omega C_t + \frac{1}{R_t}) T = 2 R_\ell I_o I_\ell$$

D'où :

$$T = - \frac{2 R_\ell I_o \sin \omega t \cdot j\omega B_o}{(1 + (R + j\omega L) (j\omega C_w + \frac{1}{R_a})) (j\omega C_t + \frac{1}{R_t})}$$

## d) Etude de la photodiode et du circuit de correction

-----

La photodiode est l'élément qui permet de transformer les variations de température de la lampe en un signal électrique. Pour la photodiode utilisée, l'étude des caractéristiques montre qu'elle est équivalente à un générateur de tension élevée  $V_o$  et de grande résistance interne  $\rho = 10^7 \Omega$ .

Pour de faibles variations,  $V_o$  est proportionnel à la variation de température du filament de la lampe :  $V_o = kT$ .

Le circuit de sortie est représenté par la figure VII - 8, ci-après :

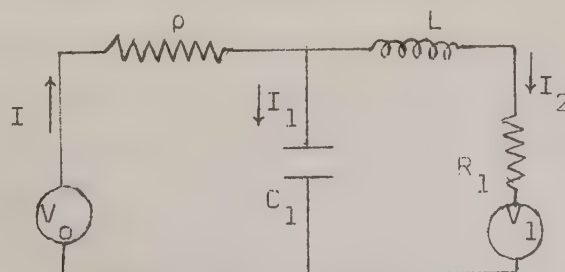


Fig. VII - 8





$V_1$  représente la f. e. m d'induction pouvant apparaître dans les bobines à la suite d'une variation du champ magnétique de l'électroaimant.

Le signe de  $V_1$  est donné par la loi de Lenz.

On obtient :

$$I_2 (\rho (1 + R_1 j C_1 \omega - L_1 C_1 \omega^2) + R_1 + j L_1 \omega) = V_0 - V_1 (1 + j \rho C_1 \omega)$$

Aux fréquences qui nous intéressent ( $< 500$  Hz), de nombreux termes sont négligeables.

$$\text{En effet, à } 500 \text{ Hz: } \begin{cases} L_1 C_1 \omega^2 \approx 26 \times 10^{-3} \\ R_1 C_1 \omega \approx 1 \times 10^{-3} \end{cases}$$

ce qui est négligeable devant 1.

De plus, à la même fréquence :

$$R_1 = 11\,000 \, \Omega$$

$$L_1 \omega = 240\,000 \, \Omega$$

ce qui est petit devant  $\rho = 10^7 \Omega$ .

$$\text{Nous pouvons donc écrire : } \rho I_2 = V_0 - V_1 (1 + j \rho C_1 \omega)$$

Or, même aux fréquences les plus élevées du domaine d'application du stabilisateur ( $\approx 500$  Hz)

$$V_1 (1 + j \rho C_1 \omega) \ll V_0.$$

En effet, à 500 Hz, la f. e. m  $V_1$  induite par une variation de champ sinusoïdale d'amplitude  $10^{-5}$  T, n'est que de 6 V et  $\rho C_1 \omega \approx 1$ .

Dans ces mêmes conditions, la détermination expérimentale du courant de correction en boucle ouverte (bobines de correction débranchées) nous a donné  $V_0 \approx 300$  V.

On peut donc négliger le terme en  $V_1$  devant  $V_0$ , cette approximation étant encore meilleure pour des fréquences plus basses,

$$\text{d'où : } V_0 = \rho I_2.$$

Ainsi, le courant qui circule dans les bobines de correction n'est pas perturbé par les fluctuations du champ magnétique que l'on veut corriger. Il en est de même du champ de correction, la photodiode se comportant comme un générateur de courant. Pour cette raison, notre stabilisateur est un dispositif à retour unitaire, puisque le coefficient de contre-réaction apparaissant dans l'expression du gain en boucle fermée est égal à 1. Finalement, si nous appelons  $\beta$  la sensibilité des bobines de correction, ces dernières produisent le champ  $B_1$  :

$$B_1 = \beta I_2 \text{ ou } B_1 = \beta \frac{V_0}{\rho} \text{ ou encore } B_1 = \frac{\beta k}{\rho} T.$$



En reprenant l'expression de T donnée précédemment au paragraphe de l'intégrateur, nous obtenons :

$$\frac{B_1}{B_0} = - \frac{2 R_\ell I_0 sNS \frac{\beta k}{\rho} j\omega}{\left(1 + (R + j L\omega) \left(j C\omega + \frac{1}{R_a}\right)\right) + \left(j\omega C_t + \frac{1}{R_t}\right)}$$

L'expression ci-dessus n'est autre que le gain complexe G du stabilisateur en boucle ouverte.

e) Etude du coefficient de stabilisation

-----

Le champ de correction en boucle ouverte est donné par

$B_1 = GB_0$ . Lorsque le système fonctionne en boucle fermée, le champ de correction  $B'_1$  se superpose au champ perturbateur  $B_0$ , le signal d'entrée est alors :  $B_0 + B'_1$

avec :  $B'_1 = G(B_0 + B'_1)$

d'où :

$$B_0 + B'_1 = B_0 \frac{1}{1 - G}$$

Le coefficient de stabilisation est :  $K = \left| \frac{B_0}{B_0 + B'_1} \right| = |1 - G|$

G étant une fonction compliquée, nous allons faire une étude sommaire et approximative du coefficient de stabilisation.

Pour cela, nous nous plaçons dans la zone de fréquence où la stabilisation est bonne, c'est-à-dire lorsque  $|G|$  est grand devant 1, alors  $K \approx |G|$ .

On peut écrire :

$$G = \frac{A}{\left(1 + \frac{1}{R_t C_t j\omega}\right) \left(1 + \frac{R}{R_a} - LC \omega^2 + j\omega \left(\frac{L}{R_a} + RC\right)\right)}$$

A étant un nombre réel constant

d'où :

$$|G| = \frac{A}{\sqrt{\left(1 + \frac{R}{R_a} + \frac{L/R_a + RC}{R_t C_t} - LC \omega^2\right)^2 + \left(\frac{L}{R_a} + RC + \frac{LC \omega}{R_t C_t} - \frac{1 + R/R_a}{R_t C_t \omega}\right)^2}}$$

et avec les valeurs numériques de notre montage :

$$|G| = \frac{A}{\sqrt{\left(1,05 - 4 \times 10^{-6} \omega^2\right)^2 + \left(13,50 \times 10^{-4} \omega - \frac{14,5}{\omega}\right)^2}}$$

La courbe théorique  $\left|\frac{G}{A}\right| = f(\omega)$  est donnée par la figure VII - 9.

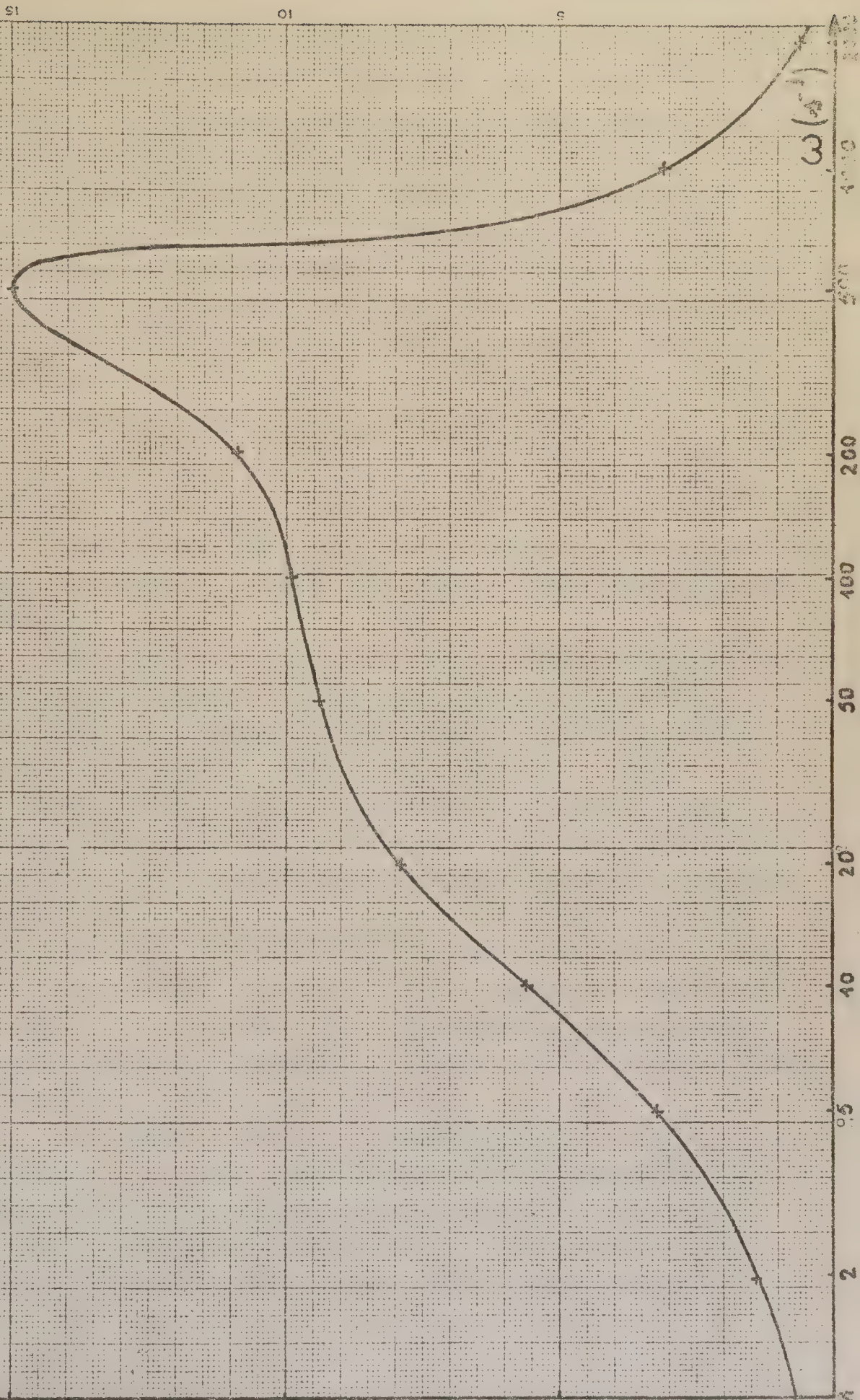
Nous voyons sur cette dernière que  $\left|\frac{G}{A}\right|$ , donc K, qui est petit





Courbe théorique  $\frac{|G|}{A}$

$\frac{|G|}{A}$







pour les fréquences inférieures à 1 Hz ( $\omega \approx 6 \text{ s}^{-1}$ ), présente un palier entre 8 et 20 Hz ( $\omega = 50 \text{ à } 150 \text{ s}^{-1}$ ). Aux environs de  $\omega = 500 \text{ s}^{-1}$  (80 Hz), la courbe passe par un maximum relativement aigu, dû à la résonance du circuit, puis décroît ensuite très rapidement.

L'étude expérimentale de K ne donne pas de maximum pour  $\omega \approx 500 \text{ s}^{-1}$ , à cause de pertes par courants de Foucault dans le fer de l'électroaimant que nous avons négligées : croissant comme le carré de la fréquence, elles provoquent une rapide diminution de  $|G|$  au dessus de 20 Hz, phénomène mis en évidence par les courbes expérimentales que nous donnons plus loin.

### C) Interprétation des résultats expérimentaux

#### a) Influence du circuit magnétique sur le comportement des

.....  
 =====

Dans un premier temps, nous avons effectué la mesure des tensions induites dans les bobines réceptrices et dans une bobine placée au centre de l'entrefer.

Dans ces deux cas, nous avons maintenu constante l'amplitude du courant dans les enroulements de l'électroaimant quelle que soit la fréquence, ce qui nous a permis de tracer les courbes I et II de la figure VII - 10.

La courbe I donne la loi de variation de la tension induite aux bornes des bobines réceptrices et la courbe II, celle de la tension induite aux bornes d'une bobine de faible épaisseur placée au centre de l'entrefer. En ordonnées, nous avons porté une échelle arbitraire, étant donné que l'allure du phénomène à observer ne dépend pas de l'étalonnage.

Théoriquement, dans le cas où il n'y aurait pas de pertes dues à la présence du circuit magnétique, les tensions recueillies devraient être proportionnelles à la fréquence et les courbes I et II avoir une allure exponentielle croissante en fonction de  $(\log. f)$ .

Contrairement à ceci, ces courbes présentent un maximum aux environs de 30 Hz et l'on peut alors considérer que les pertes dans le fer deviennent importantes et ne peuvent plus être négligées. Ces courbes montrent en particulier que les perturbations de champ magnétique à fréquences plus élevées se trouvent fortement atténuées par ces pertes.

Dans un deuxième temps, nous avons étudié en fonction de la fréquence les tensions induites aux bornes des bobines réceptrices et de celle placée dans l'entrefer, lorsque les bobines de correction sont seules alimentées par un courant d'amplitude constante.



# Induction courant magnétisant

- I. dans bobines réceptrices.
- II. dans l'entrefer.

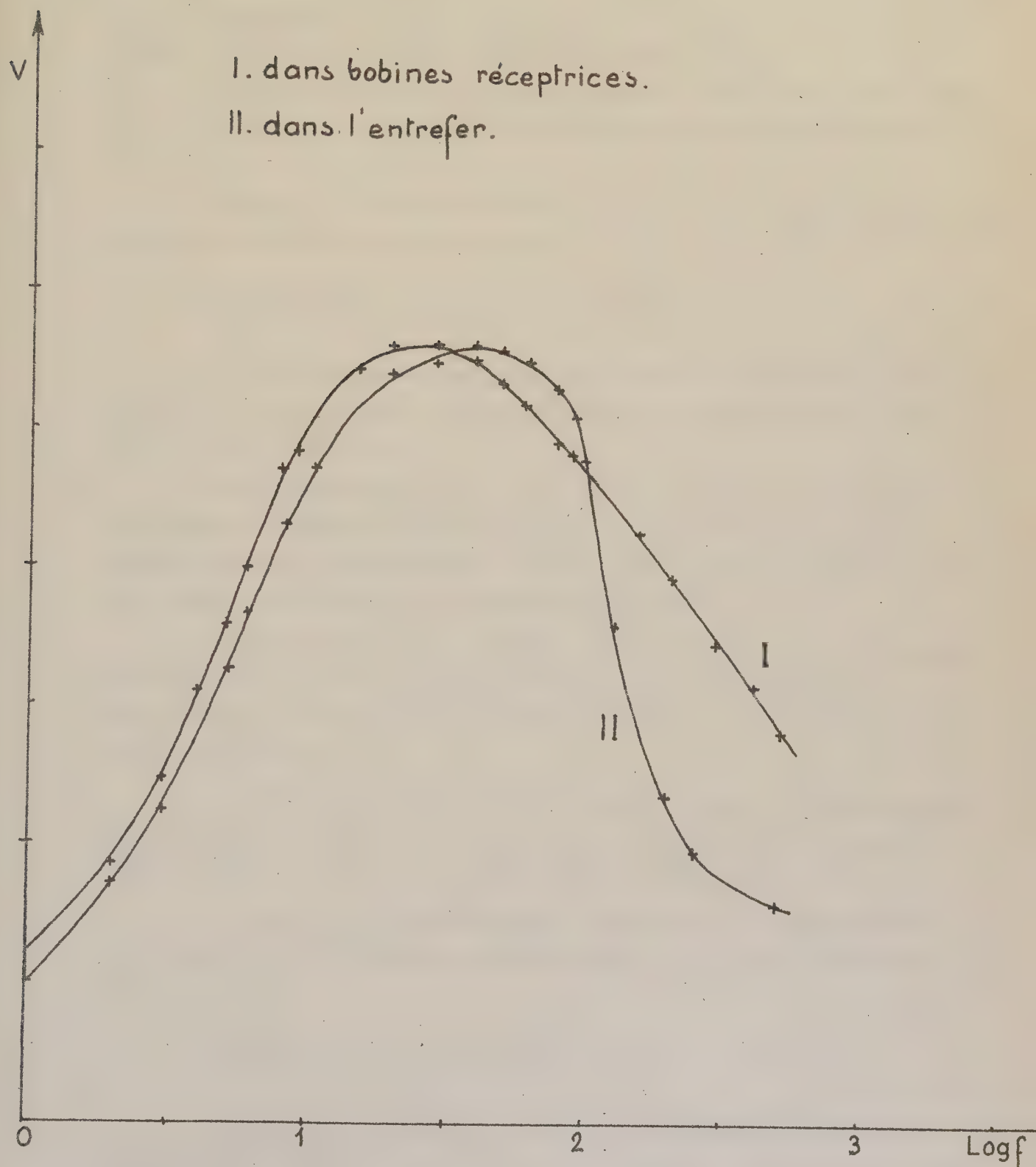


fig. VII - 10



Les courbes III et IV (figure VII - 11) nous donnent l'aspect général du phénomène. Elles ont bien l'allure exponentielle observée lorsqu'il n'y a pas de pertes dans le circuit magnétique.

Alors que le comportement des bobines magnétisantes de l'électroaimant est lié directement aux pertes dans le fer, les bobines de correction semblent y être peu sensibles, étant donné leurs positions en bout de pôle. La présence ou l'absence du champ continu B produit par l'électroaimant n'apporte pas de différence appréciable dans les résultats expérimentaux.

Les bobines de correction semblent donc, en première approximation, se comporter comme des bobines placées dans l'air.

#### b) Caractéristiques d'amplitude et de phase

-----

La caractéristique d'amplitude nous permet de connaître le gain en courant de tout le système lorsque les bobines de correction sont remplacées par une résistance.

Pour chaque fréquence, nous avons relevé la valeur du courant de correction en fonction de celle du courant d'alimentation des bobines magnétisantes de l'électroaimant, puis nous avons tracé la courbe donnant leur rapport en fonction de la fréquence (figure VII - 12).

Compte-tenu de la phase, cette courbe donne l'efficacité du stabilisateur ; son allure se retrouve lors de l'étude du coefficient de stabilisation en fonction de la fréquence, comme nous l'avons montré dans la partie théorique.

Le stabilisateur étant en fonctionnement normal, nous avons étudié aussi la phase du courant de correction par rapport à celle du courant d'alimentation des bobines de l'électroaimant (figure VII - 13).

En raison des caractéristiques d'amplitude et de phase obtenues, nous voyons que l'efficacité du stabilisateur s'étend approximativement de 0,1 Hz à 100 Hz.

#### c) Etude du coefficient de stabilisation

-----

Dans toute cette étude, nous avons introduit une perturbation sinusoïdale de fréquence variable sur les bobines de l'électroaimant. Dans une première expérience, nous avons mesuré simultanément la tension  $V_1$  à la sortie de l'amplificateur (système en boucle ouverte : bobines de correction





# Induction courant correcteur

III. dans bobines réceptrices.

IV. dans l'entrefer.

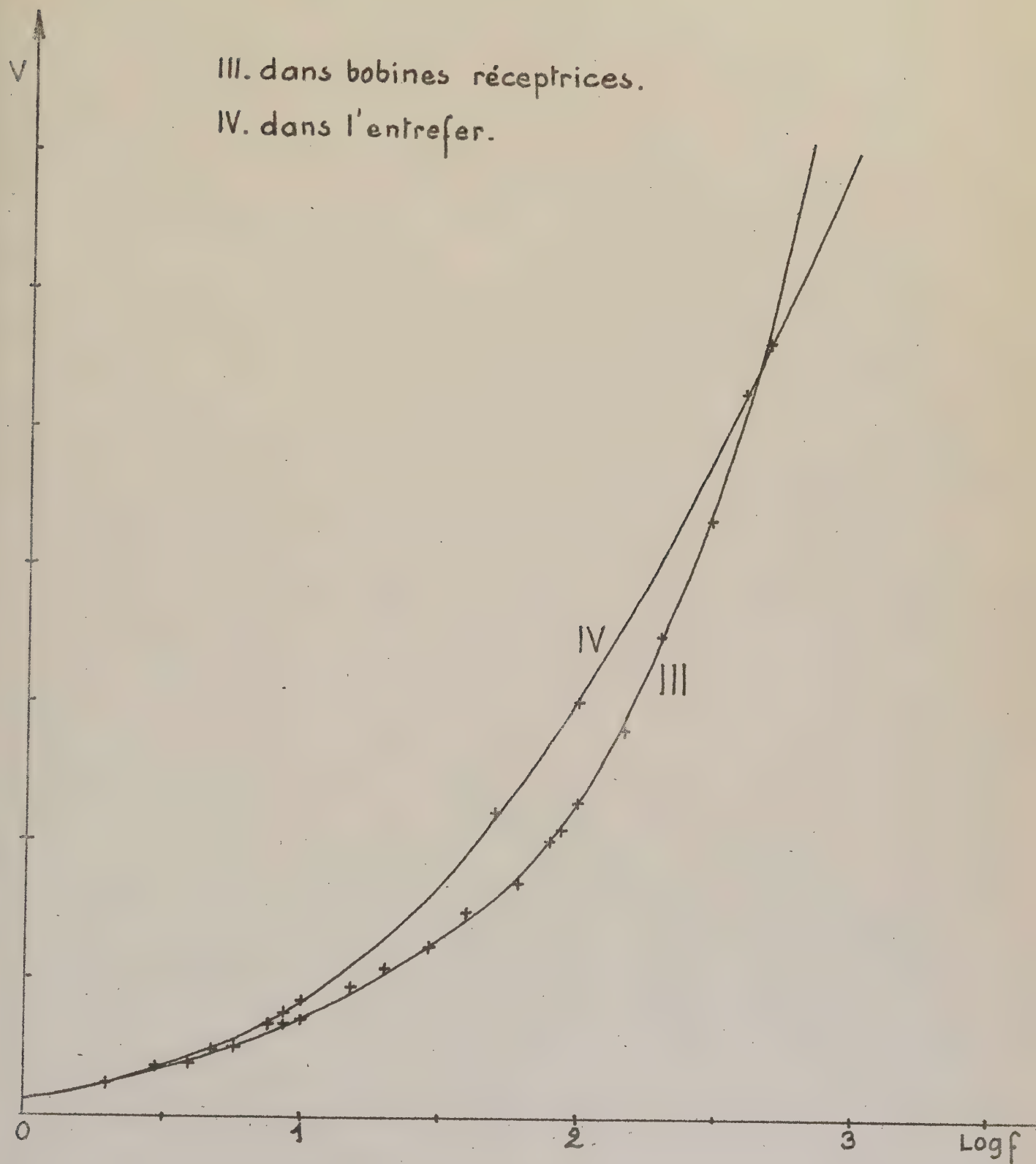
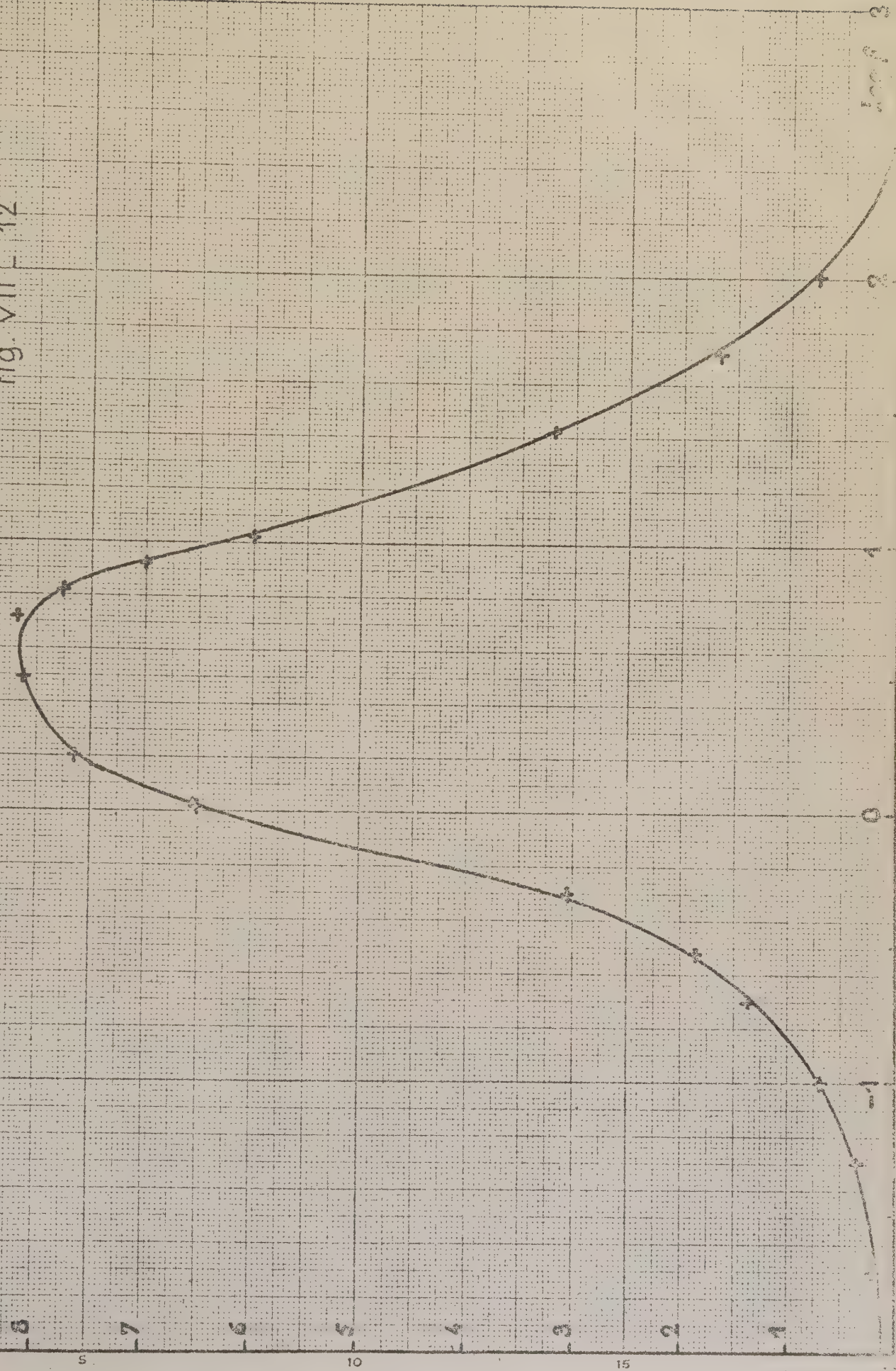


fig. VII - 11



Courbe d'amplitude

fig. VII - 12

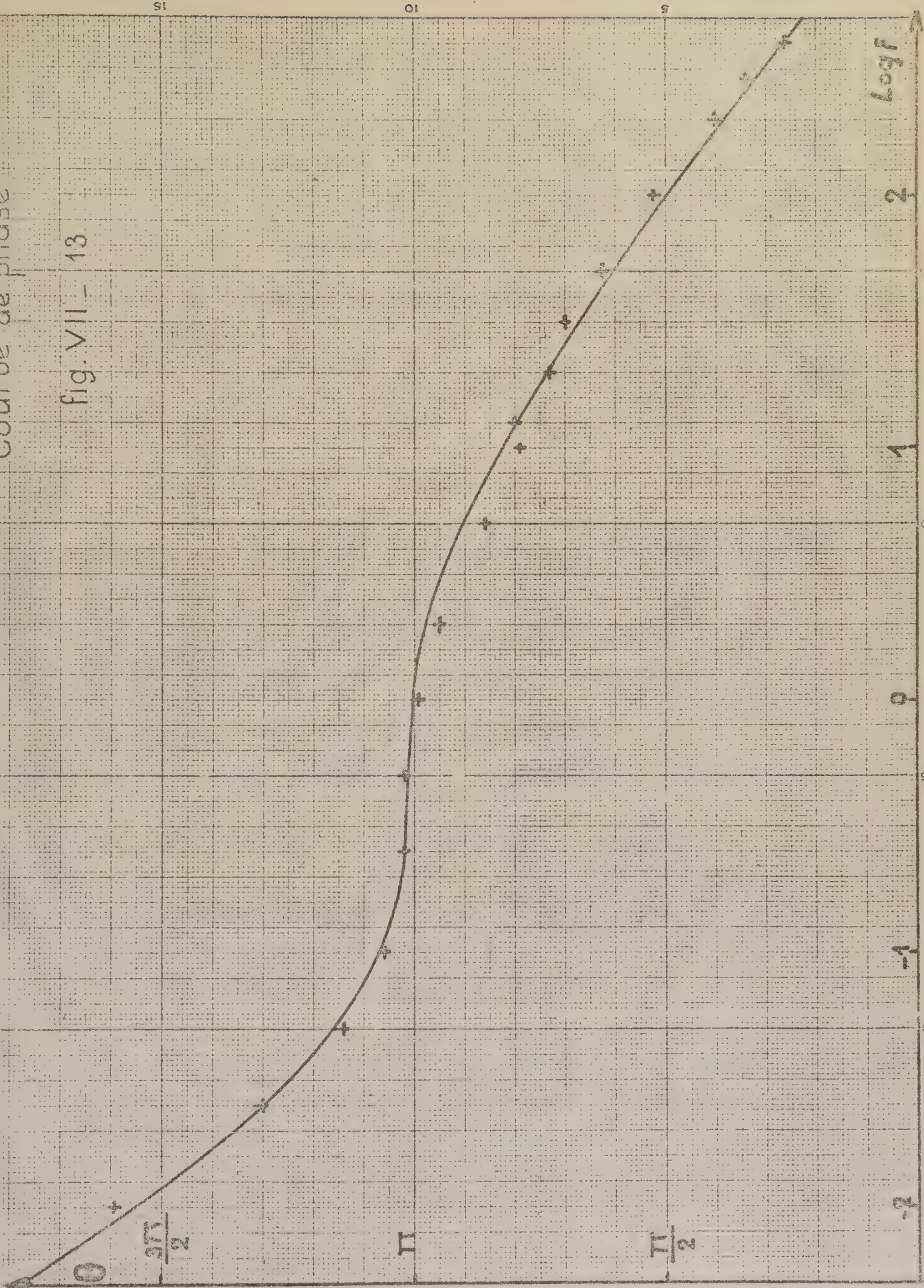






Courbe de phase

fig. VII - 13







débranchées) et la tension  $V_2$  à la sortie de la bobine placée au centre de l'entrefer.

Dans une deuxième expérience, nous avons mesuré les mêmes tensions  $V'_1$  et  $V'_2$  en boucle fermée.

Nous avons défini le coefficient de stabilisation interne par le rapport :

$$\frac{V_1}{V'_1} = K_f,$$

analogue au coefficient théorique égal au rapport du champ perturbateur au champ résiduel.

De la même manière, nous avons défini le coefficient de stabilisation dans l'entrefer, pour la bobine utilisée, par le rapport :

$$\frac{V_2}{V'_2} = K_e.$$

Les coefficients de stabilisation ainsi mesurés sont très différents l'un de l'autre, comme le montrent les courbes expérimentales des figures VII - 14 et VII - 15.

Pour donner une explication à ce phénomène, considérons un tube de force, de petites dimensions autour de l'axe des pôles, dont la section est traversée par le flux créé par le champ perturbateur  $B_0$  ; il présente une section constante  $\Delta S$  dans le fer et dans l'air.

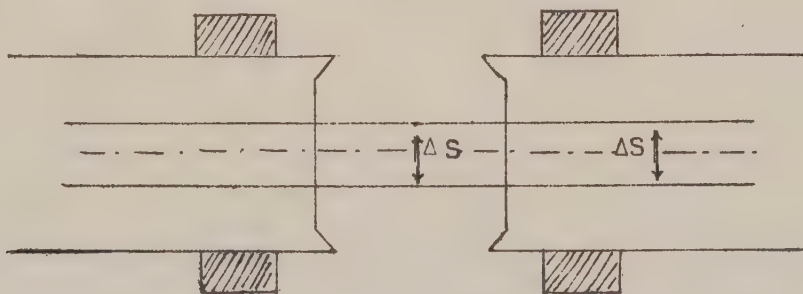


Fig. VII - 16

Ce tube de force est traversé par la variation de flux  $\Delta\phi_0$ , correspondant au champ perturbateur  $B_0$ , celui produit par les bobines réceptrices étant négligeable.

Les bobines de correction se comportant comme des bobines placées dans l'air, il est possible que leurs tubes de force ne présentent pas



Coefficient de stabilisation  $K_f$ .

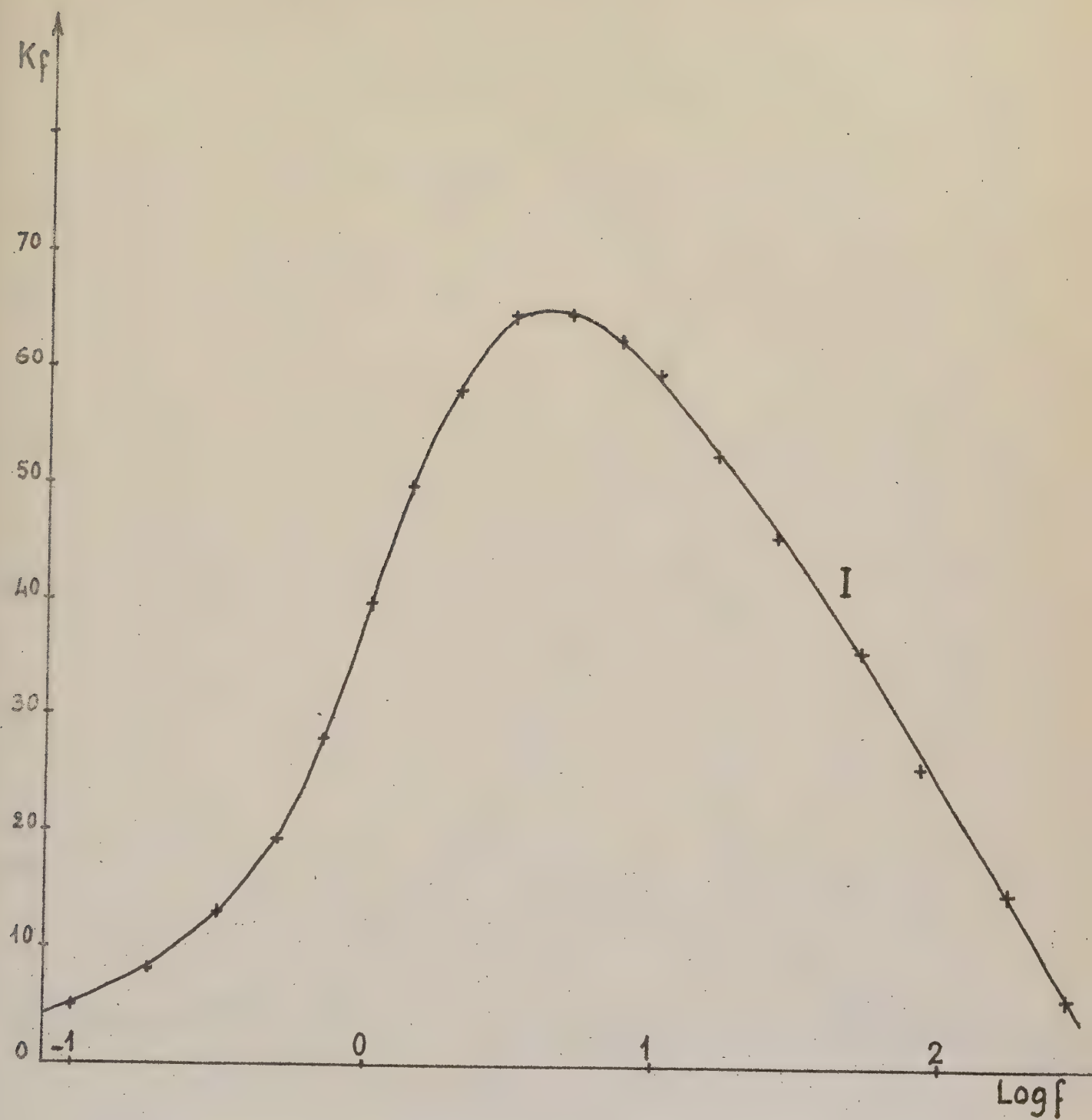


fig. VII - 14



Coefficient de stabilisation  $K_e$ .

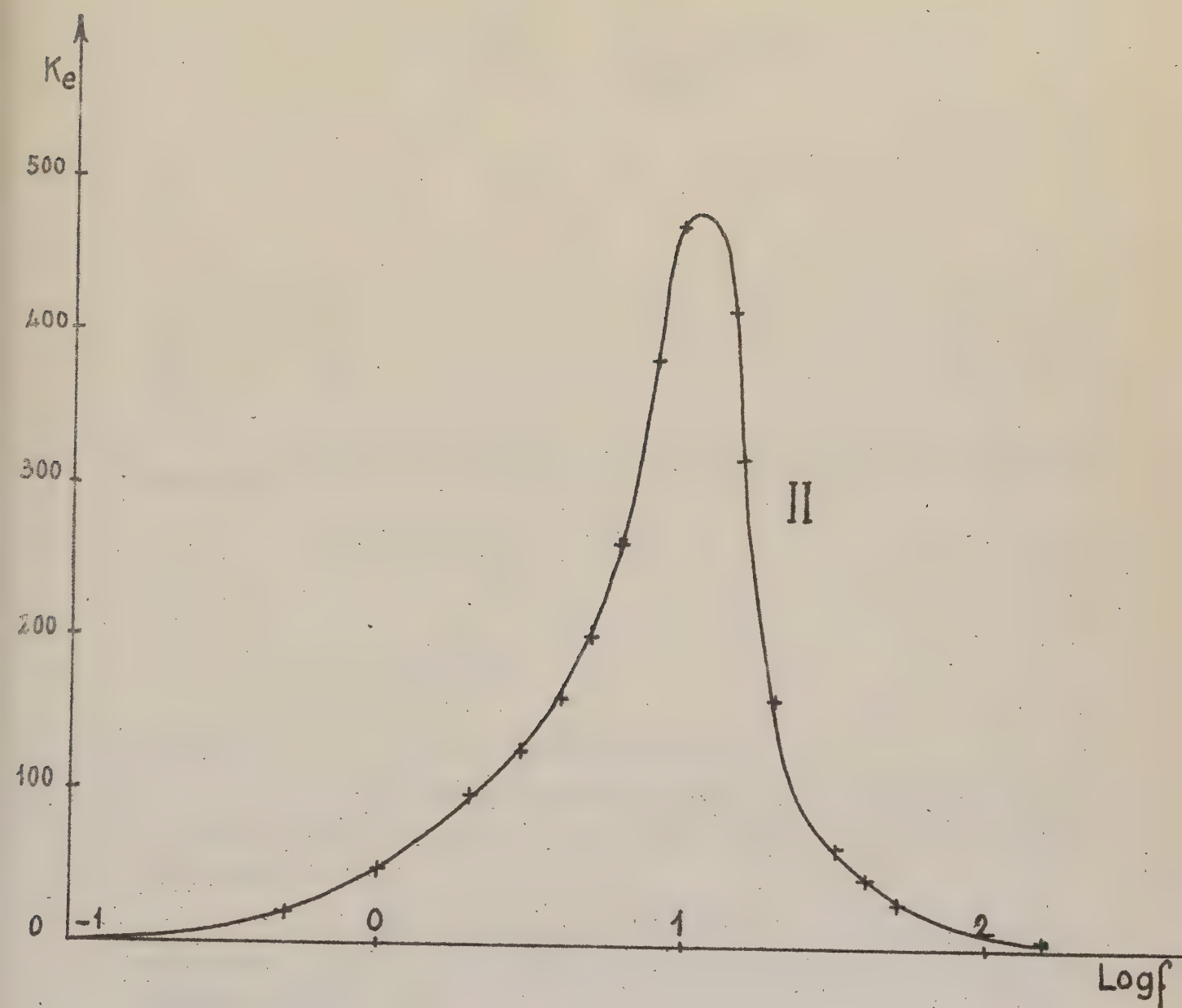


fig. VII - 15





la même section dans le fer et dans l'air.

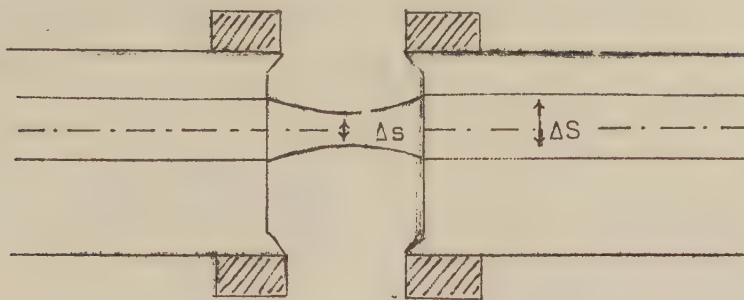


Fig. VII - 17

Appelons  $k$  le rapport  $\frac{\Delta S}{\Delta s}$ ,  $\Delta S$  et  $\Delta s$  étant respectivement les sections du tube de force considéré dans le fer et au centre de l'entrefer. Ces sections sont traversées par le flux  $\Delta\phi_1$  créé par les bobines de correction.

Les deux coefficients de stabilisation,  $K_f$  dans le fer, et  $K_e$  au centre de l'entrefer, sont définis par les deux égalités :

$$K_f = \frac{\Delta\phi_0}{\Delta\phi_0 + \Delta\phi_1}$$

$$K_e = \frac{\Delta\phi_0}{\Delta\phi_0 + k \Delta\phi_1}$$

en précisant que  $\Delta\phi_1$  est de signe opposé à  $\Delta\phi_0$ .

Si la position des bobines de correction sur les pôles entraîne une concentration des lignes de force dans l'air ( $k > 1$ ), on en déduit immédiatement que  $K_e > K_f$ .

Ces résultats, envisagés pour un tube de force de section relativement petite, restent valables pour une section plus grande, par suite de la géométrie particulière des pôles, à condition toutefois que les lignes de force du champ magnétique restent perpendiculaires à la surface de la bobine réceptrice placée dans l'entrefer, le champ restant uniforme.

S'il n'en est pas ainsi, le coefficient de stabilisation  $K_e$  dépend de la surface de la bobine.

On peut montrer que  $K_e$  peut devenir très grand par rapport à  $K_f$ , malgré une très faible concentration du flux dans l'entrefer.



Du point de vue logique, il ne saurait être question, en effet, d'admettre une forte concentration de flux dans un entrefer étroit.

Posons  $K = 1 + \epsilon$   $\epsilon$  étant petit devant 1.

On a :

$$K_e = \frac{\Delta\phi_0}{\Delta\phi_0 + \Delta\phi_1 + \epsilon\Delta\phi_1}$$

$$\frac{1}{K_e} = \frac{1}{K_f} + \epsilon \frac{\Delta\phi_1}{\Delta\phi_0}$$

$$\frac{1}{K_f} = 1 + \frac{\Delta\phi_1}{\Delta\phi_0}$$

$$\text{d'où : } \frac{1}{K_e} = \frac{1}{K_f} + \epsilon \left( \frac{1}{K_f} - 1 \right)$$

$$\text{et } K_e = \frac{K_f}{1 - \epsilon(K_f - 1)}$$

En général le terme  $\epsilon(K_f - 1)$  est inférieur à 1 ; mais il peut lui devenir supérieur : il y a alors surcompensation.

On a pu vérifier par l'expérience l'ensemble des conclusions précédentes, et estimer que le stabilisateur de flux améliore globalement la stabilité au centre de l'entrefer d'environ 100 fois.

#### IV - CONCLUSION

Après avoir constaté expérimentalement que notre équipement donnait un champ magnétique suffisamment homogène et stable pour nos études d'effets magnéto-optiques, nous avons voulu déterminer de façon plus précise la stabilité du champ magnétique obtenu.

Pour cela, nous avons examiné la forme et la dérive d'une raie de résonance magnétique nucléaire obtenue à l'aide d'une solution aqueuse de sulfate ferrique.

Cette étude nous a montré que la stabilité à long terme est supérieure à  $10^{-4}$ , tandis que le régime de mémoire de phase que nous avons pu observer indique que la stabilité instantanée l'est à  $10^{-5}$  (78).

-----



## CHAPITRE VIII

=====

### RESULTATS EXPERIMENTAUX

Les méthodes, dont nous avons développé précédemment les théories et les techniques, ont servi à étudier au Laboratoire des corps anisotropes par transmission, et par réflexion, des échantillons très absorbants (doués de propriétés magnétiques), ou métalliques. Ces recherches sont, pour la plupart, le fruit d'une collaboration qui m'était indispensable pour effectuer les mesures nécessaires.

#### I - ECHANTILLONS DE RUBIS (45)

Nous avons pu étudier les modifications de structure apportées à l'onde électromagnétique par la traversée d'une section de guide circulaire contenant un cylindre de rubis.

Ces cristaux nous ont été fournis par la Société "Le Rubis Synthétique des Alpes", et étaient destinés à équiper des lasers. Ils sont taillés en forme de cylindre de révolution, de façon à ce que l'axe optique soit situé dans un plan de section droite.

Nous avons disposé de deux échantillons non polis, d'une longueur de 100 mm et d'un diamètre de 10 mm. Nous avons été amenés à les examiner en polarimétrie ultra-hertzienne pour apprécier leur état cristallin, sans faire appel à une taille et un poli optique très coûteux. C'est pourquoi nous nous sommes limités à l'étude de la rotation  $\theta$  du grand axe de la vibration elliptique de sortie en fonction de la fréquence et de la position  $i$  du cristal.

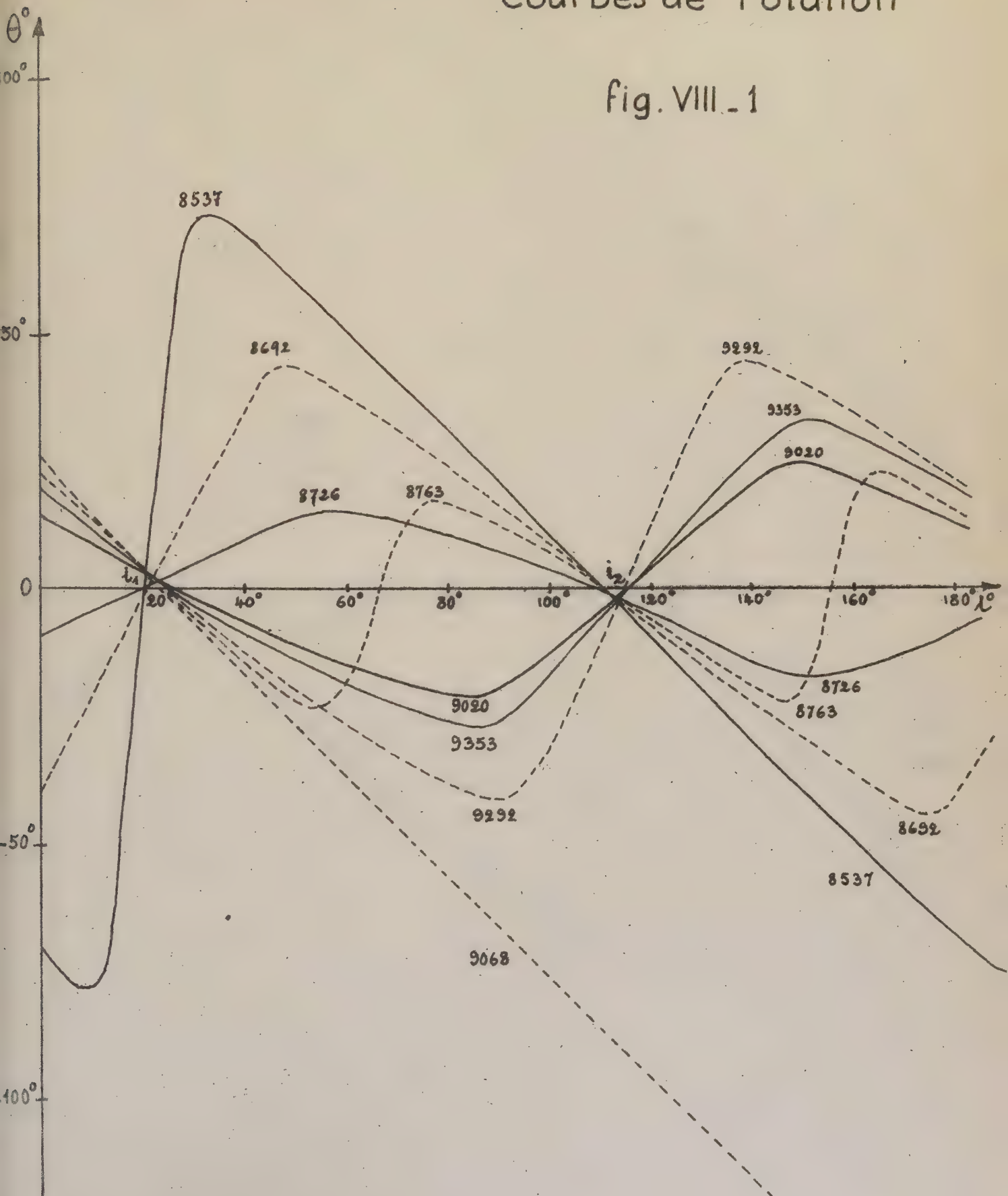
Les figures VIII - 1 et VIII - 2 donnent respectivement les résultats obtenus pour chacun des rubis. On voit que dans le cas du rubis I la rotation  $\theta$  est pratiquement nulle quelle que soit la fréquence pour les deux positions  $i_1$  et  $i_2$ . Ces deux positions sont bien définies et correspondent donc aux deux lignes neutres du cristal. Cette bonne concordance et l'écart très proche de  $\frac{\pi}{2}$  séparant les deux valeurs  $i_1$  et  $i_2$  permettent d'affirmer que l'échantillon se comporte comme un milieu monocristallin parfait et on peut donc admettre que nous sommes en présence d'un cylindre.





RUBIS I  
Courbes de rotation

fig. VIII. - 1

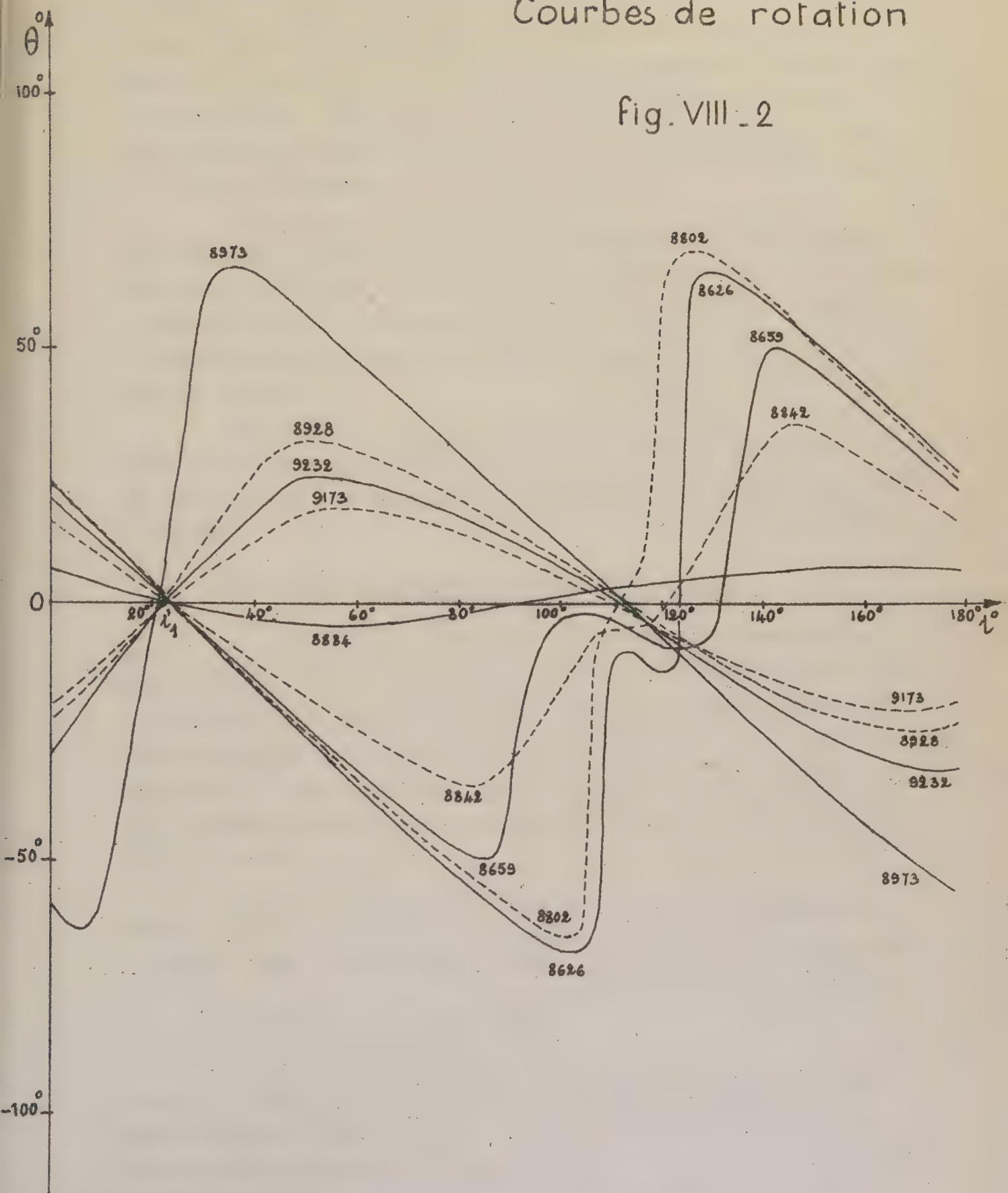




# RUBIS II

## Courbes de rotation

Fig. VIII - 2





taillé dans un monocristal de rubis. Il n'en est pas de même pour le rubis II, car on constate qu'il n'est pas possible de définir deux positions  $i'_1$  et  $i'_2$  correspondant aux lignes neutres de la lame. Les courbes tracées pour différentes fréquences ne présentent qu'un seul point commun  $i'_1$  bien défini, et il est difficile d'en déduire la position des lignes optiques. Il est donc logique de penser que le cylindre de rubis n'est pas monocristallin et qu'il se compose de plusieurs cristaux maclés et orientés différemment.

En conclusion, l'étude de la propagation d'une onde hertzienne guidée permet, en examinant les courbes de rotation, de juger l'état cristallin de l'échantillon. Cette méthode présente l'avantage de rendre possible l'examen de lames non polies ou opaques à la lumière. On obtient ainsi des renseignements qu'il aurait été difficile ou même impossible d'avoir en optique classique.

Dans le cas que nous examinons, nous pouvons ainsi affirmer que le rubis I possède les propriétés d'un échantillon monocristallin, à l'inverse du rubis II dont on ne pourrait pas obtenir de bons résultats en optique classique.

## II - CRISTAUX DE QUARTZ DE DIFFERENTES SECTIONS

Les mesures effectuées au Laboratoire ont porté sur des cristaux parallélépipédiques ou cylindriques, parmi lesquels figurent ceux dont les résultats ont été donnés comme exemple au chapitre III. Nous ne les reprendrons pas et nous nous contentons de les mentionner ici. Les autres échantillons cylindriques examinés sont les cristaux naturels taillés par la Société S.E.P.E. Seules les faces d'entrée et de sortie sont optiquement polies, les autres étant dans l'état brut laissé par le travail de taille.

Ce fait n'altère cependant pas la précision des dimensions qui atteint 10  $\mu$ . Les parallélépipèdes de quartz, qui nous ont été fournis par la Société "Quartz Electronique", présentent la même précision de taille.

### A) Cristaux cylindriques (44)

-----

Une série d'échantillons cylindriques taillés parallèlement à l'axe et de même longueur (30 mm) a fait l'objet d'une étude dans la gamme de fréquence 8,5-10 GHz. Pour chacun d'eux, on a constaté l'existence de deux positions pratiquement orthogonales où la vibration ne subit aucune altération durant la traversée de la lame, elles correspondent aux deux





lignes neutres du cristal et sont pratiquement confondues avec les lignes optiques. Lors de l'étude des cylindres ayant un diamètre inférieur à 7 mm, nous n'avons décelé aucune énergie mesurable ayant traversée l'échantillon. Ceci est dû au fait que seules des ondes évanescentes peuvent se propager, car la longueur d'onde de la vibration incidente est supérieure aux longueurs d'onde de coupure.

Nous allons maintenant examiner en détail les résultats des échantillons de plus grands diamètres, choisis par tâtonnement de façon à obtenir des phénomènes importants ou voisins des longueurs d'onde de coupure :

- quartz C I diamètre 9 mm
- quartz C II diamètre 9,5 mm
- quartz C III diamètre 10 mm.

Les figures VIII - 3 à VIII - 21 donnent les résultats obtenus pour la rotation du grand axe de la vibration et son ellipticité.

Les courbes de rotation deviennent pratiquement des droites de pente égale à 1 pour des fréquences inférieures à 9172 MHz pour l'échantillon C I, et à 8778 MHz pour l'échantillon CII. Ce phénomène est causé par la propagation évanescente du mode lié à la plus petite permittivité ; seul, l'autre mode se propage parallèlement à l'axe optique et tourne de la même quantité angulaire que le quartz. Dans ces conditions, il n'est pas possible de faire des mesures précises au voisinage de l'autre axe, car l'amplitude de la vibration transmise est proportionnelle à la projection du vecteur champ électrique incident sur l'axe optique. L'énergie détectée tend donc vers 0 lorsqu'on effectue une rotation de  $\frac{\pi}{2}$ , ce qui interdit alors toute mesure précise. La variation de l'amplitude est donc sinusoïdale et l'on constate expérimentalement qu'il en est bien ainsi. Aux plus basses fréquences, il ne se propage donc qu'un seul mode, ce qui est conforme à la théorie exposée au chapitre V.

Si nous admettons qu'en première approximation les vitesses de propagation sont identiques à celles présentées par une onde se propageant dans des guides analogues, mais isotropes, de constantes diélectriques  $k$  et  $k'$ , l'unique mode se propageant est le mode  $TE_{11}$ .

La longueur d'onde de coupure d'un tel mode est donnée par la relation :

$$\lambda_c = 3,41 \sqrt{k} R$$

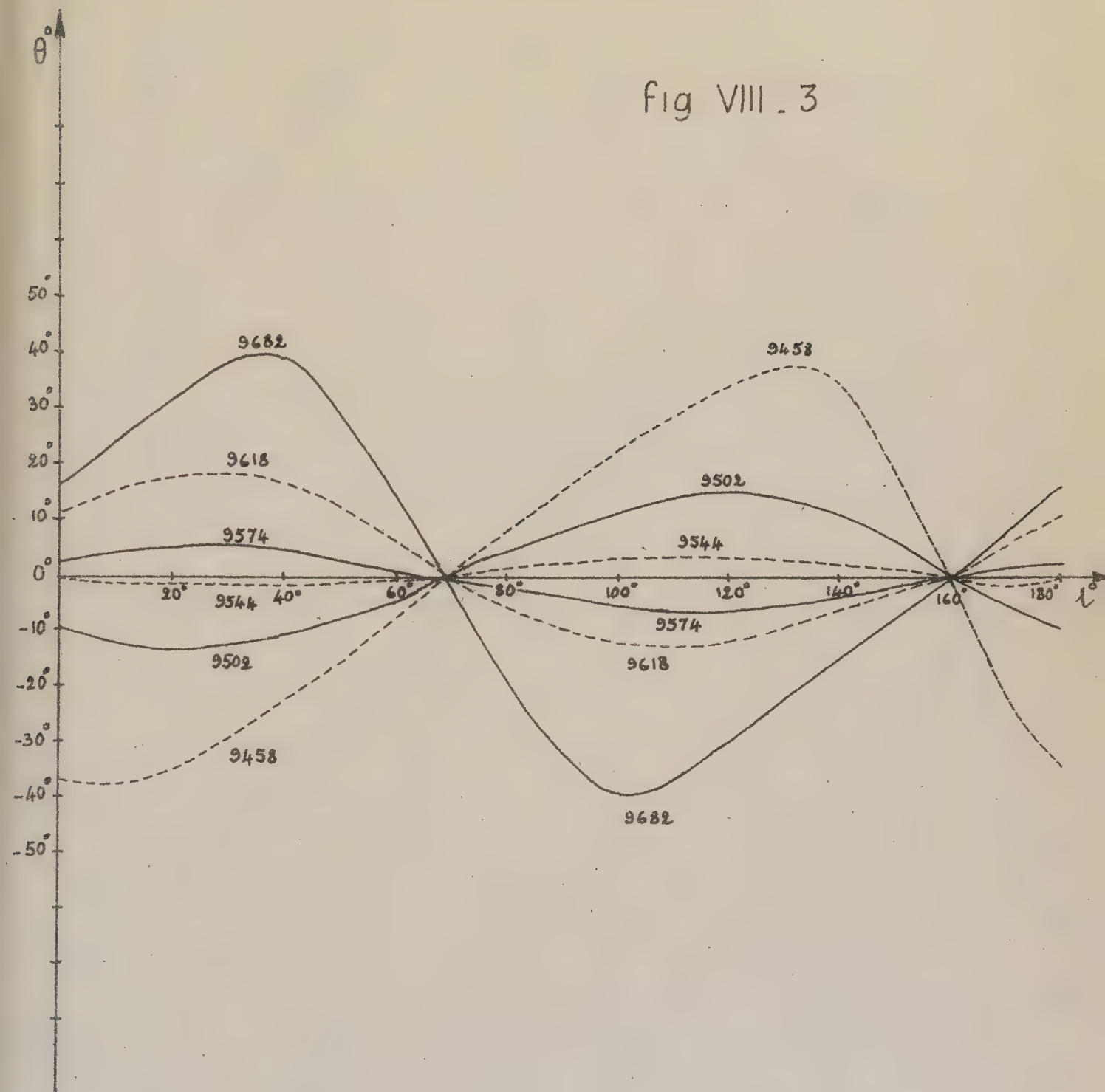
./...



# QUARTZ CI

## Courbes de rotation

Fig VIII. 3





# QUARTZ CI

## Courbes de rotation

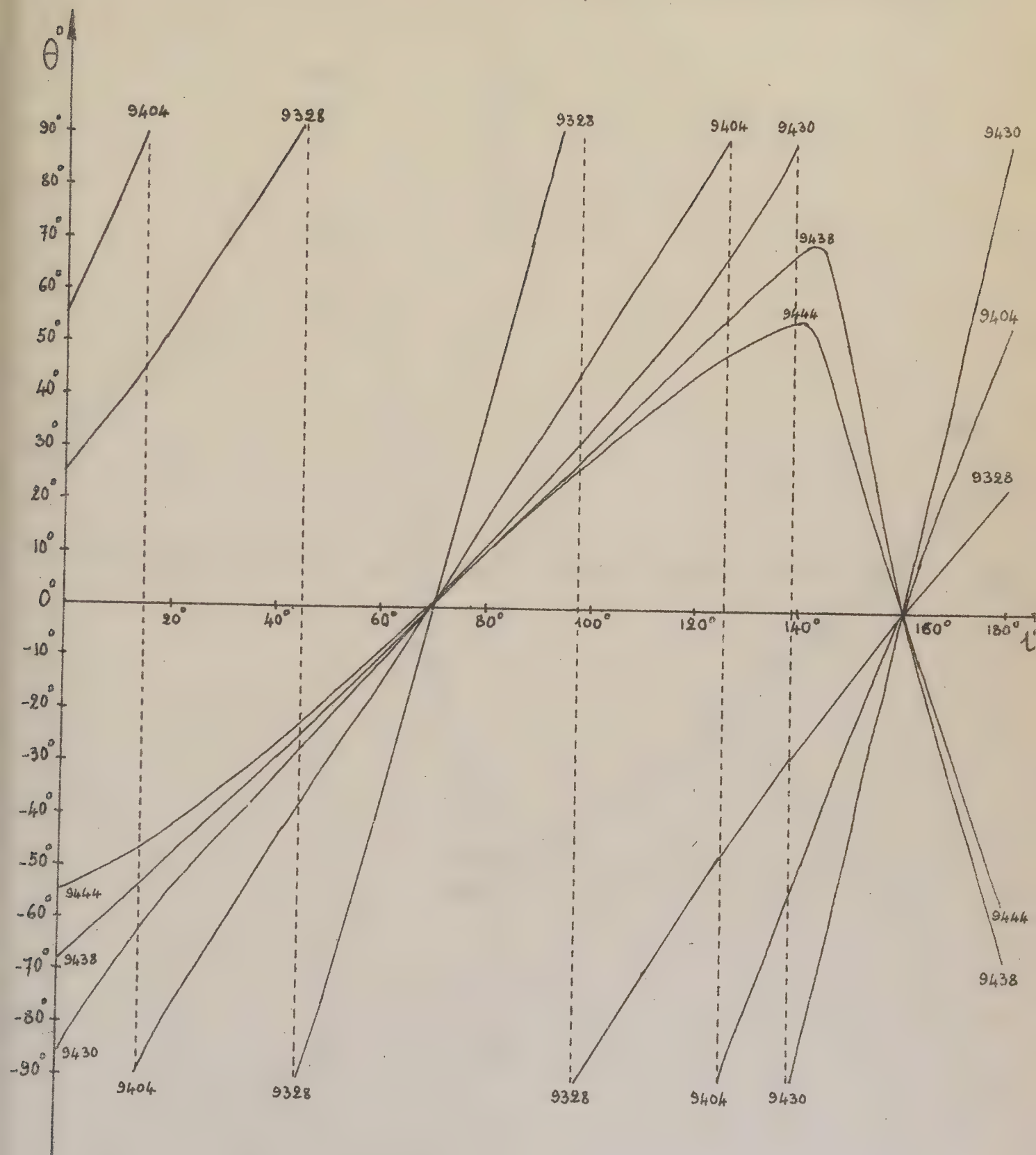


Fig VIII - 4

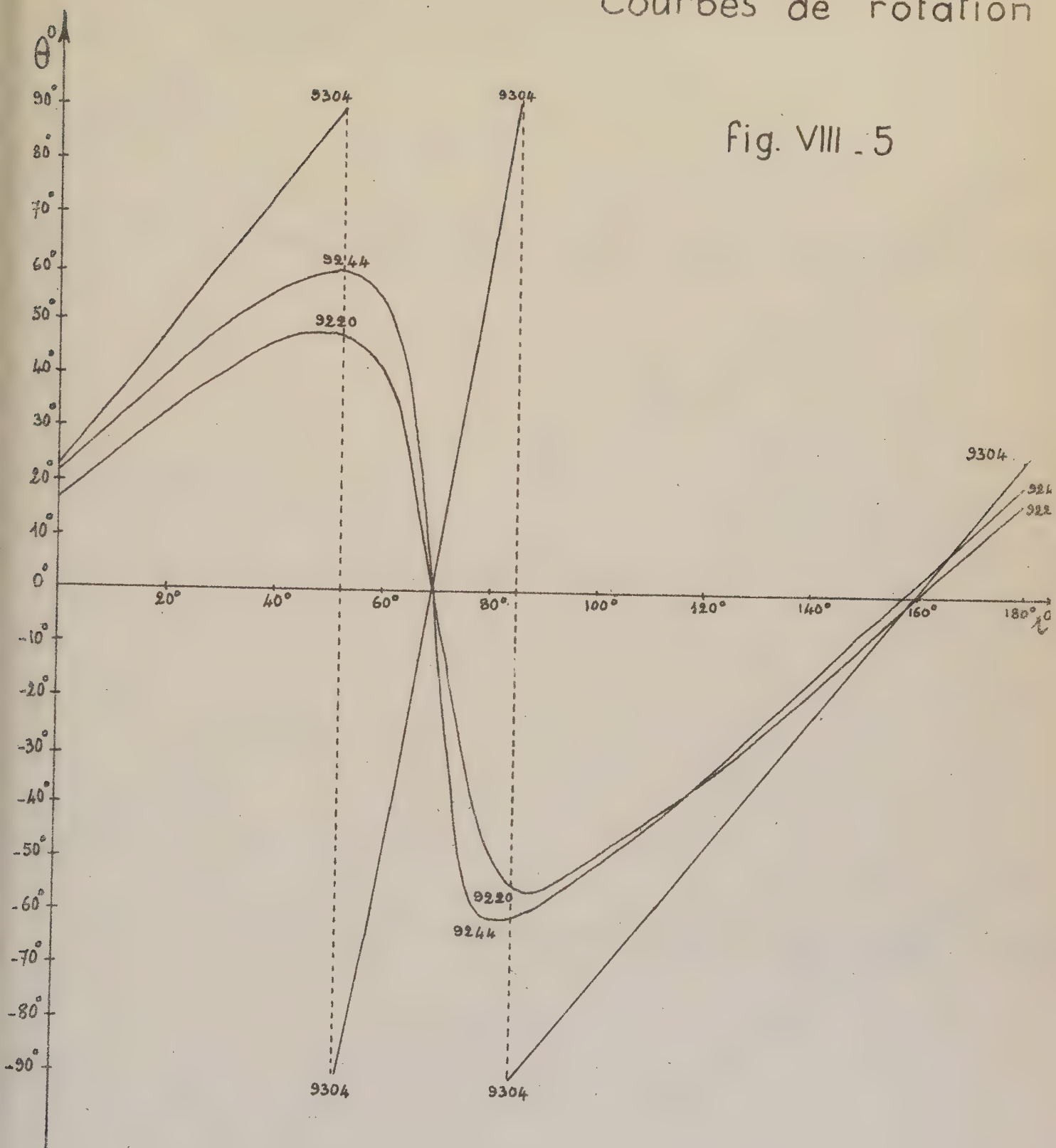




# QUARTZ C1

Courbes de rotation

fig. VIII . 5





# QUARTZ CI

## Courbes de rotation

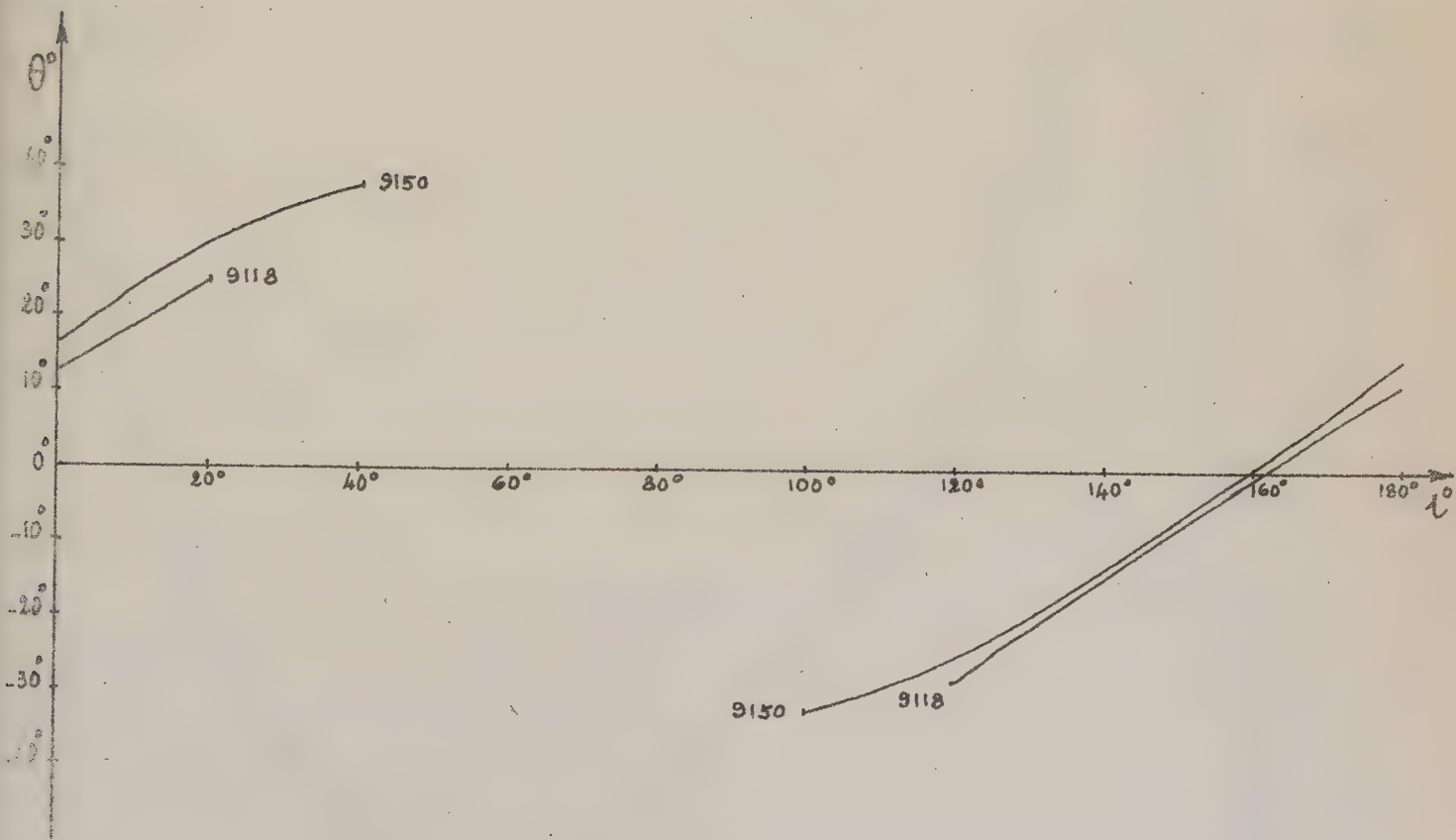
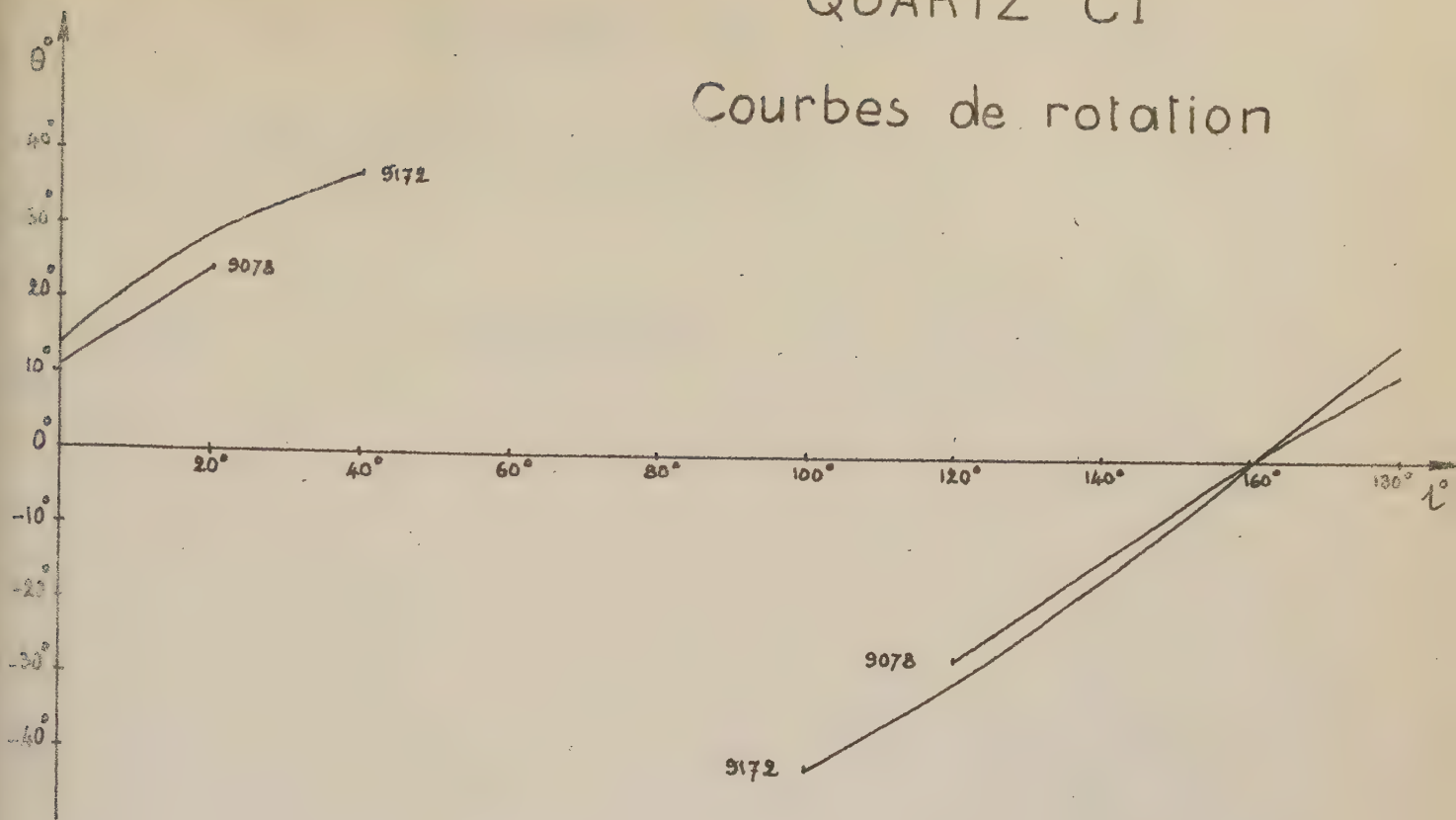
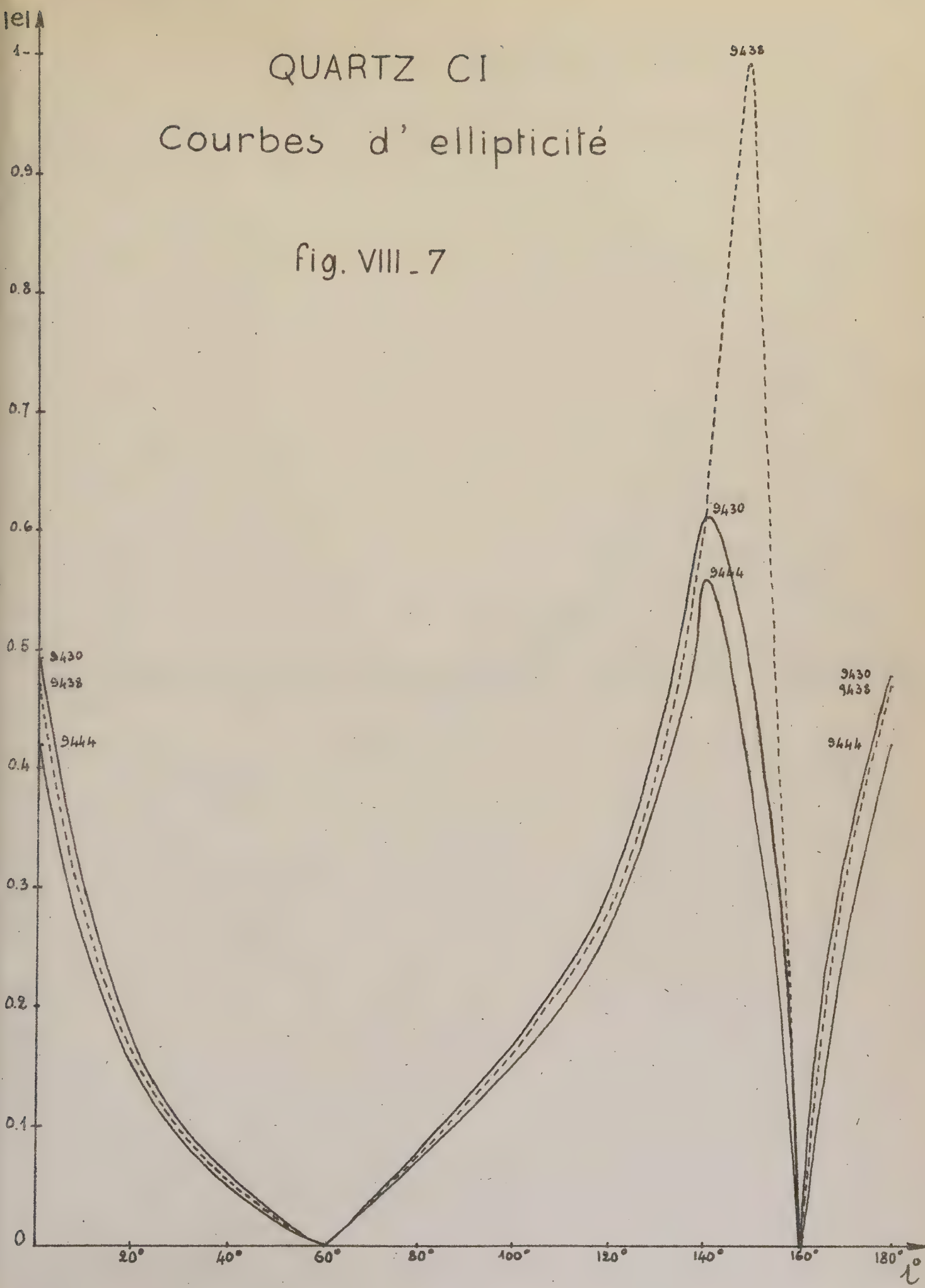


Fig. VIII : 6



QUARTZ CI  
Courbes d'ellipticité

fig. VIII - 7







# QUARTZ CII

## Courbes de rotation

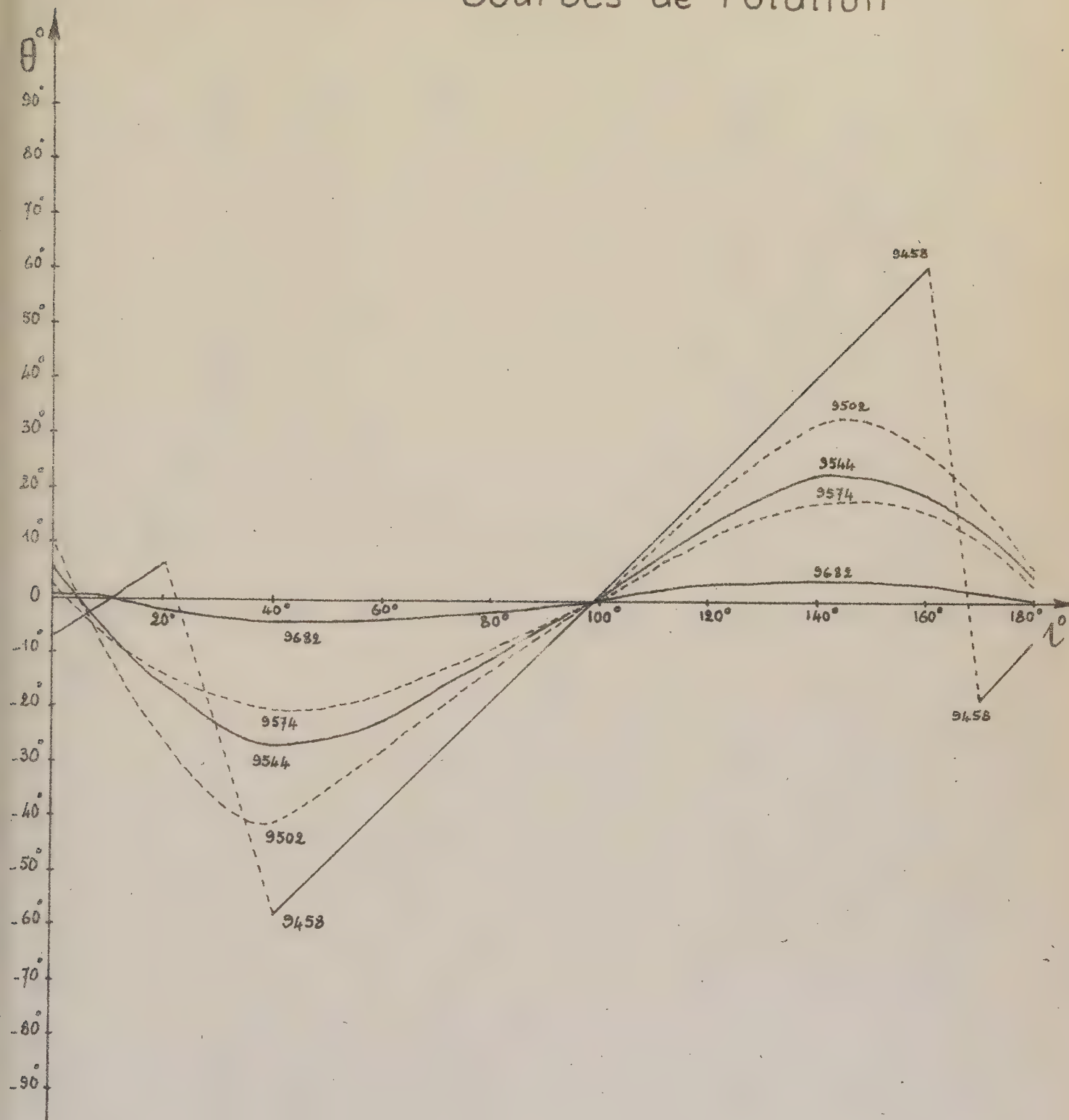


fig. VIII .8



# QUARTZ CII

## Courbes de rotation

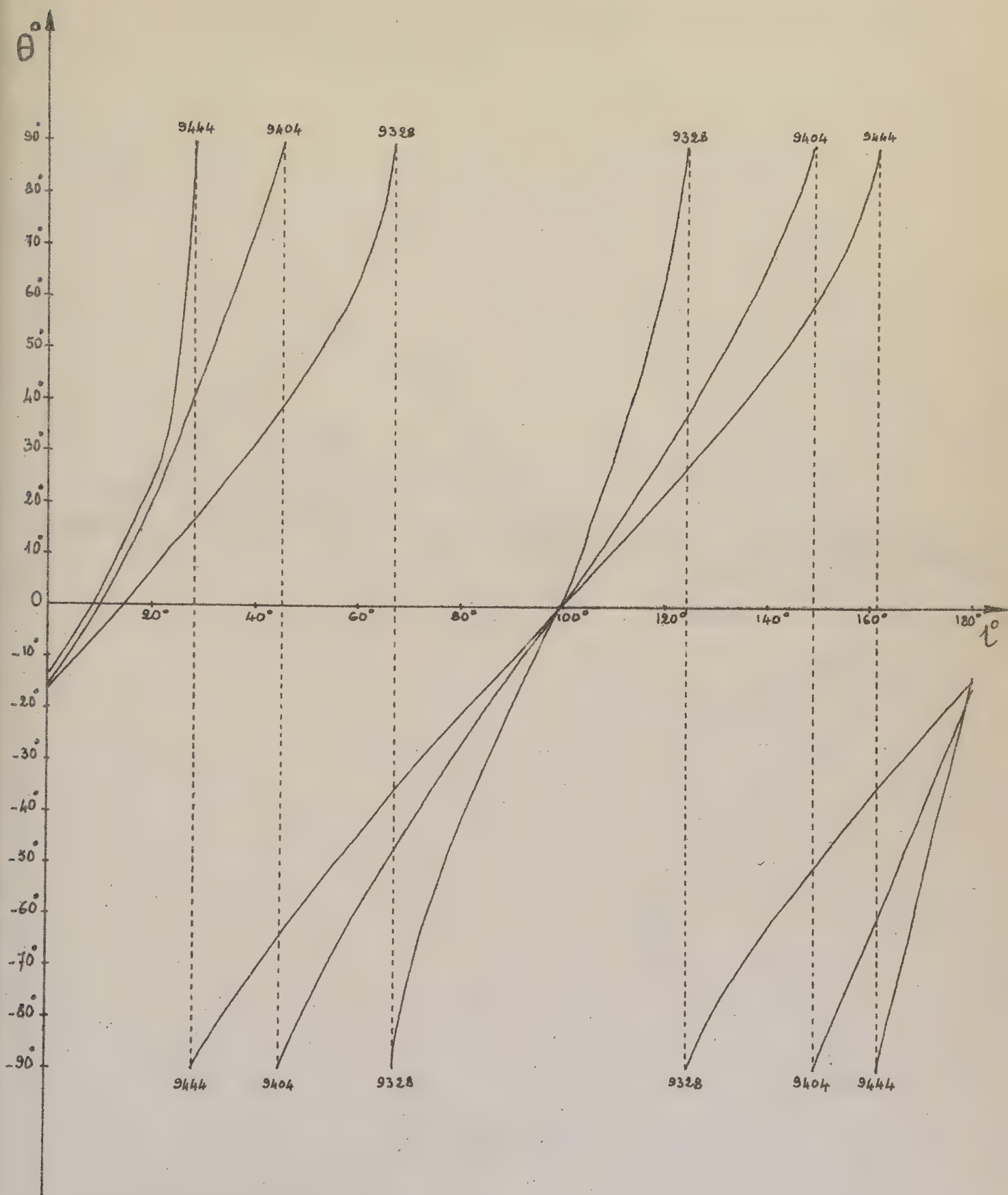


Fig. VIII - 9



# QUARTZ CII

## Courbes de rotation

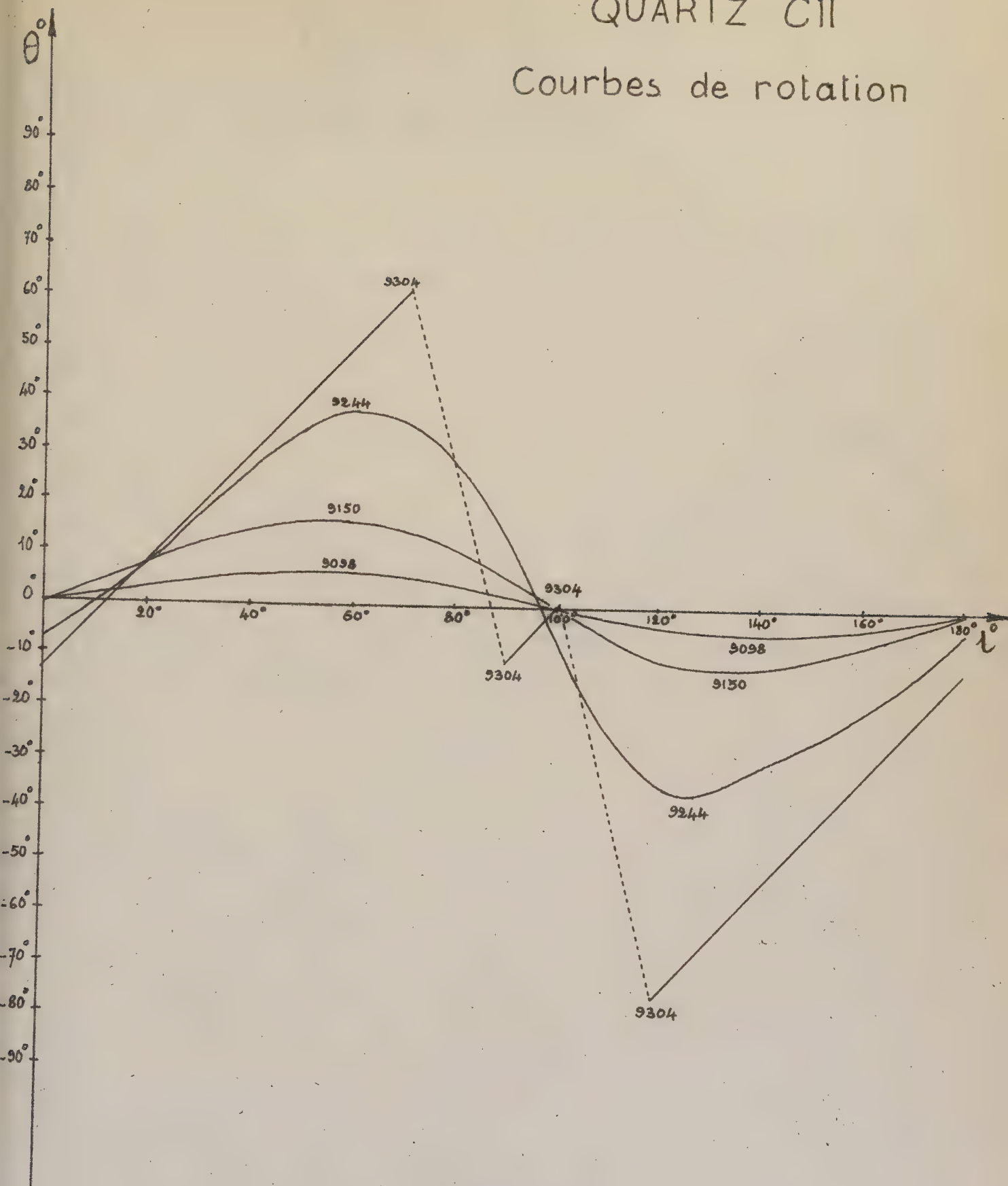


fig. VIII - 10





# QUARTZ CII

Courbes de rotation

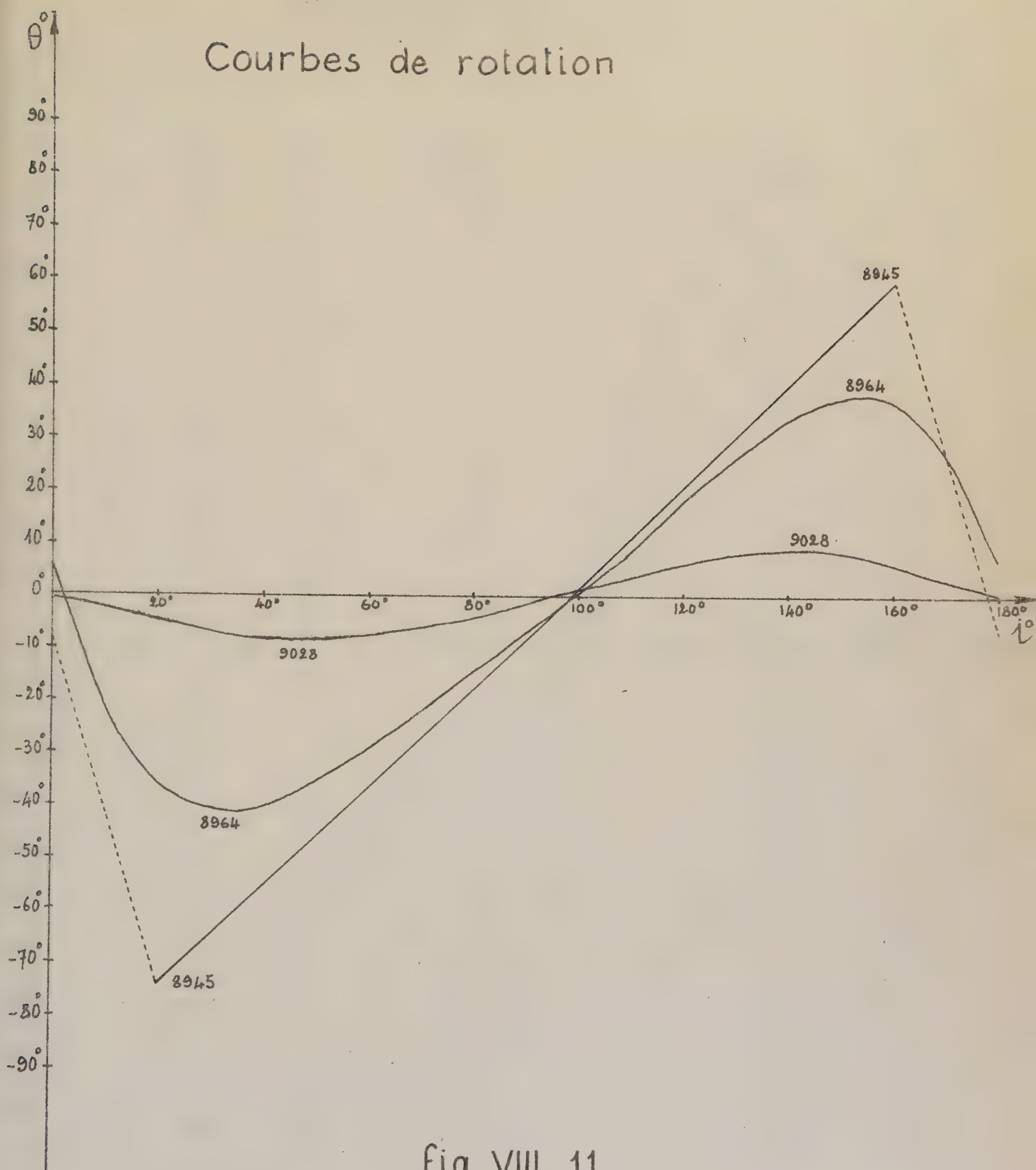


fig. VIII . 11



# QUARTZ CII

## Courbes de rotation

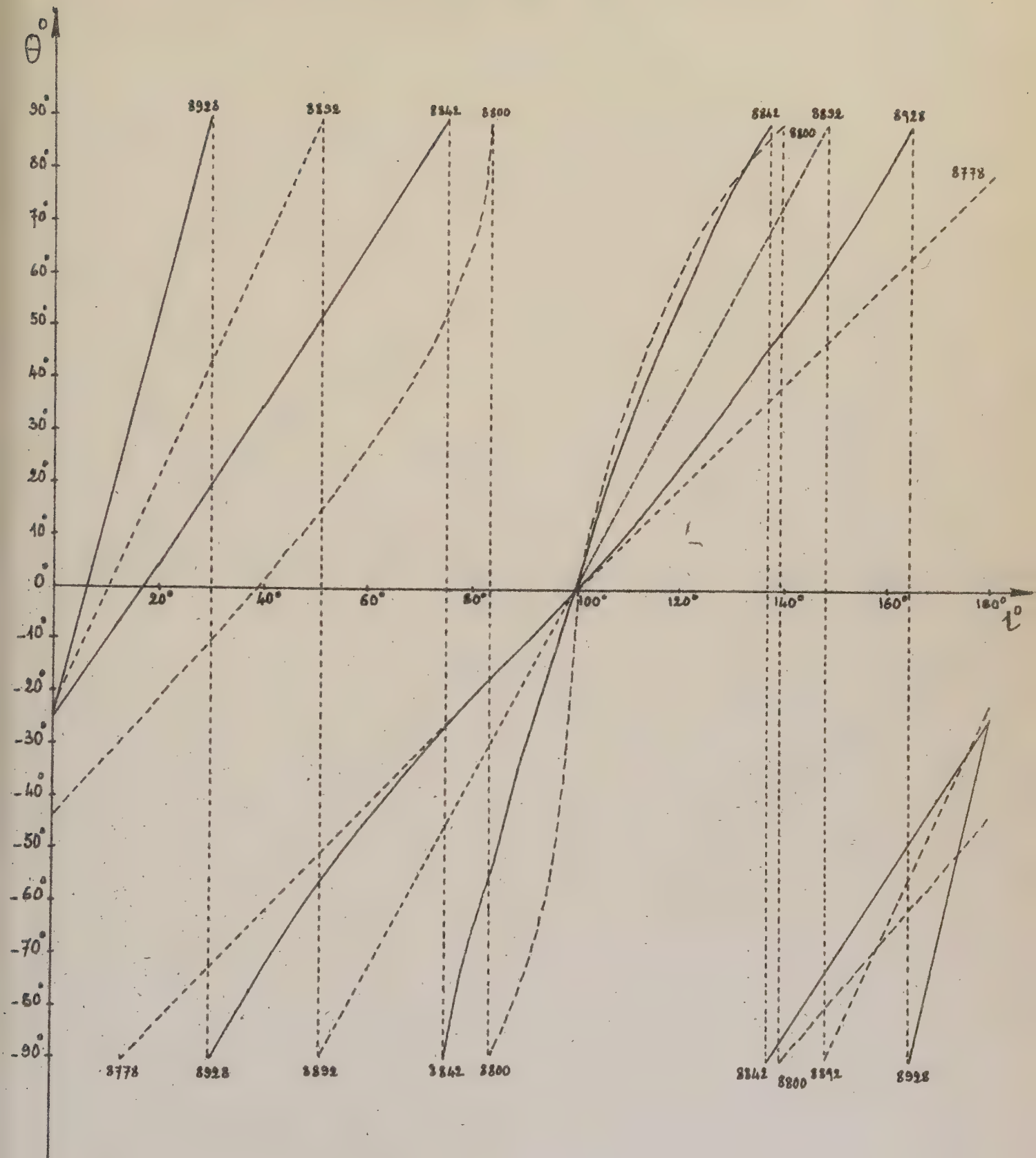


fig. VIII 12



# QUARTZ CII

## Courbes de rotation

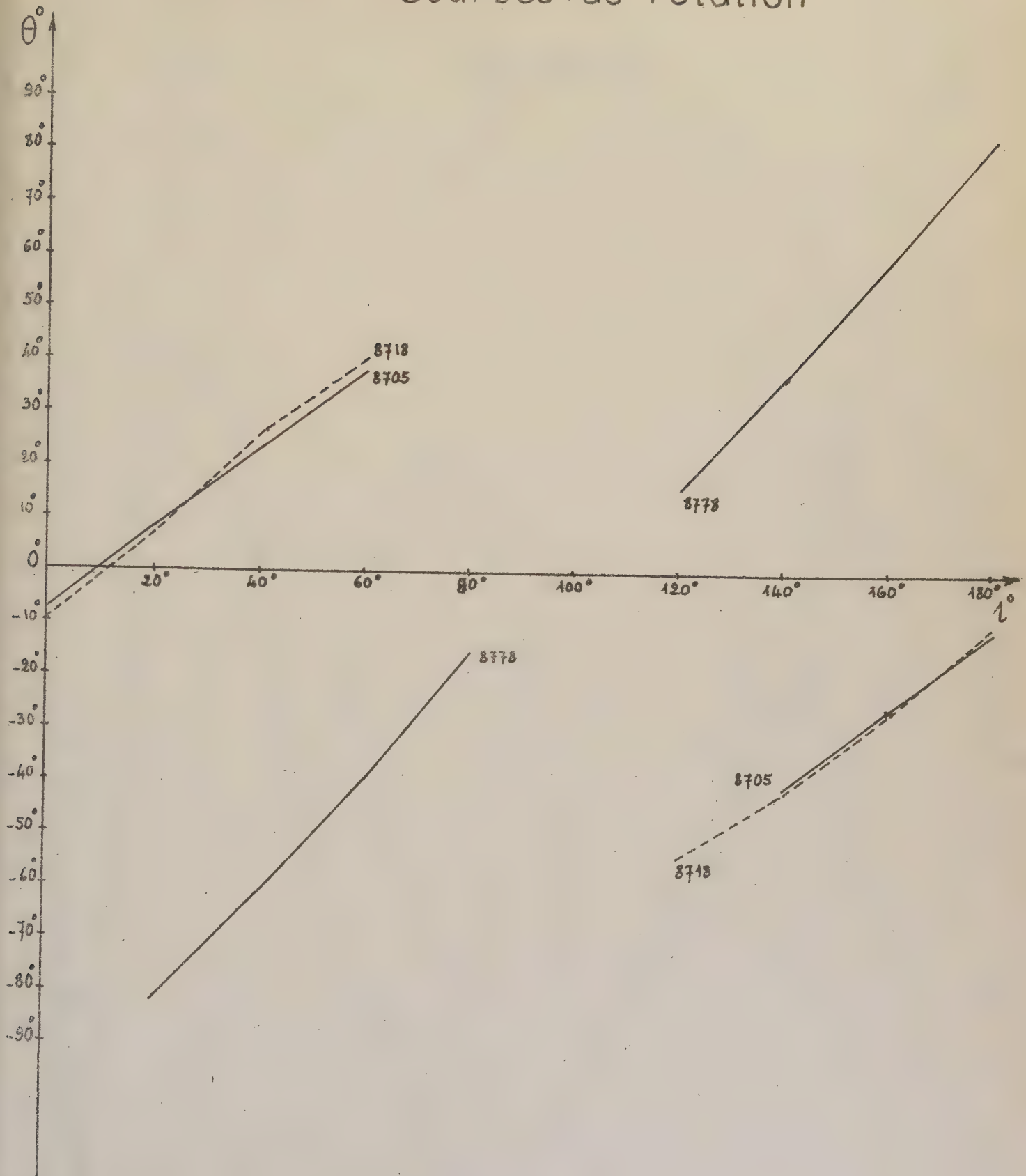


fig. VIII - 13

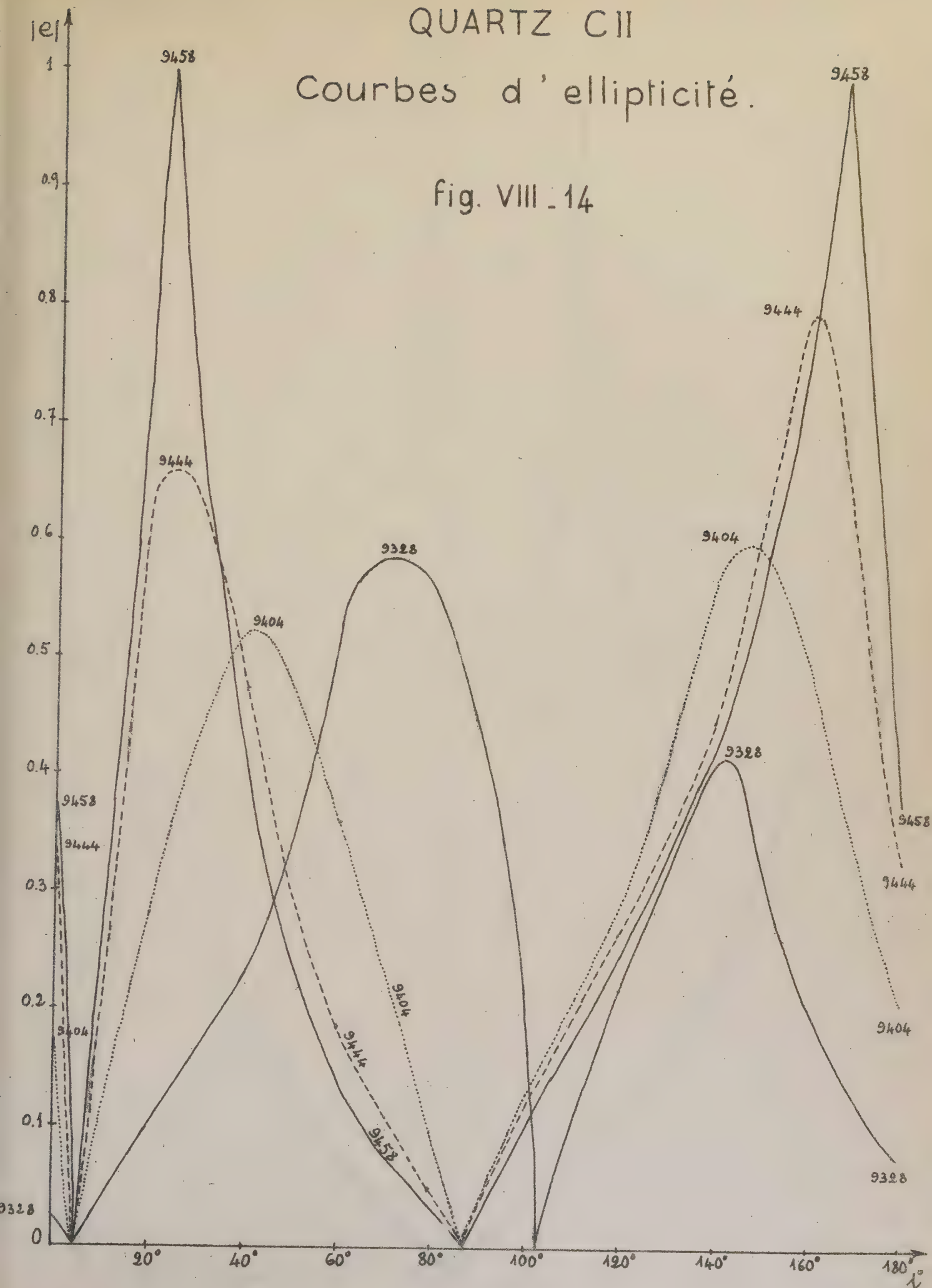




# QUARTZ CII

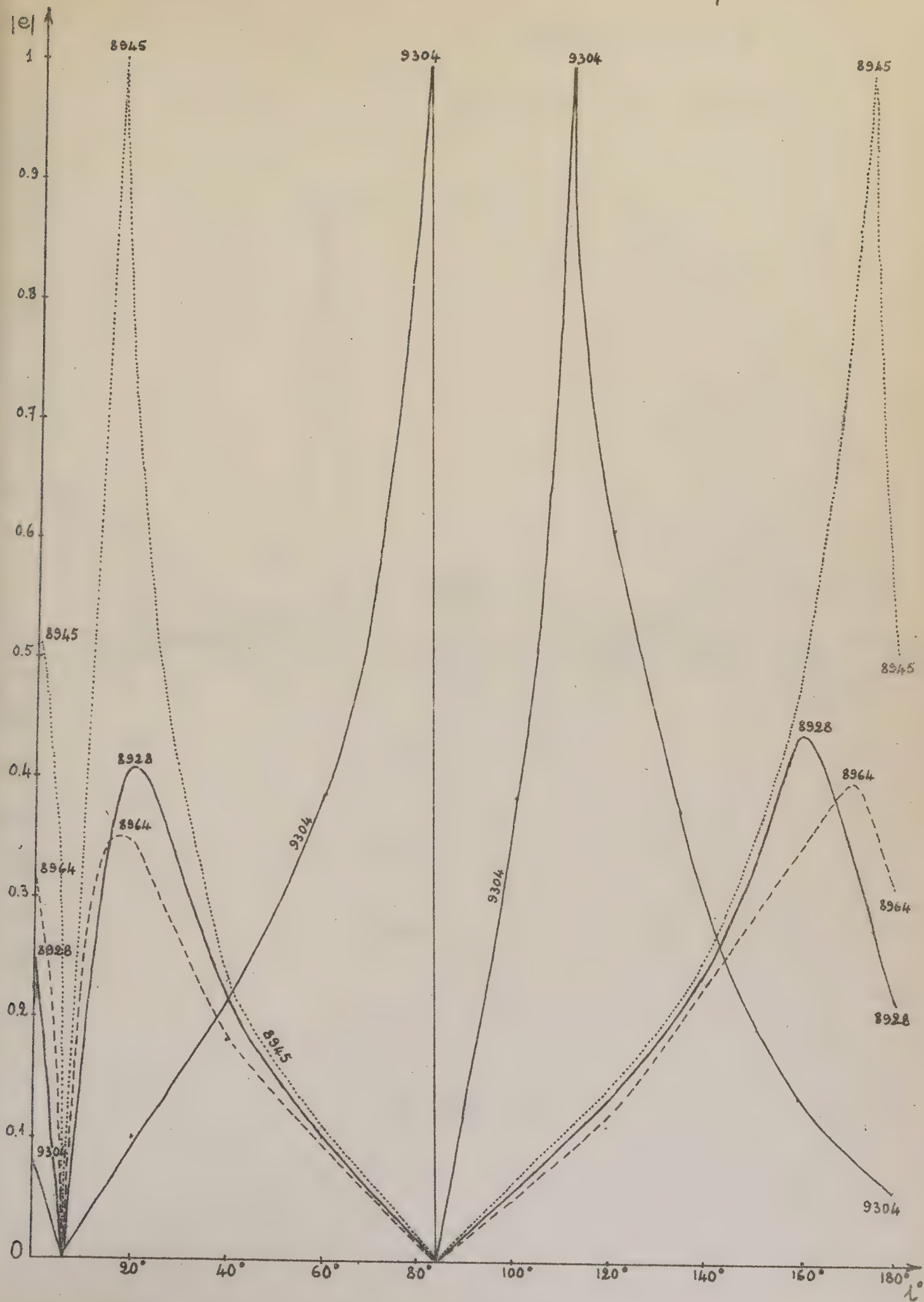
Courbes d'ellipticité.

fig. VIII - 14





# QUARTZ CII - Courbes d'ellipticité.





# QUARTZ CIII

## Courbes de rotation

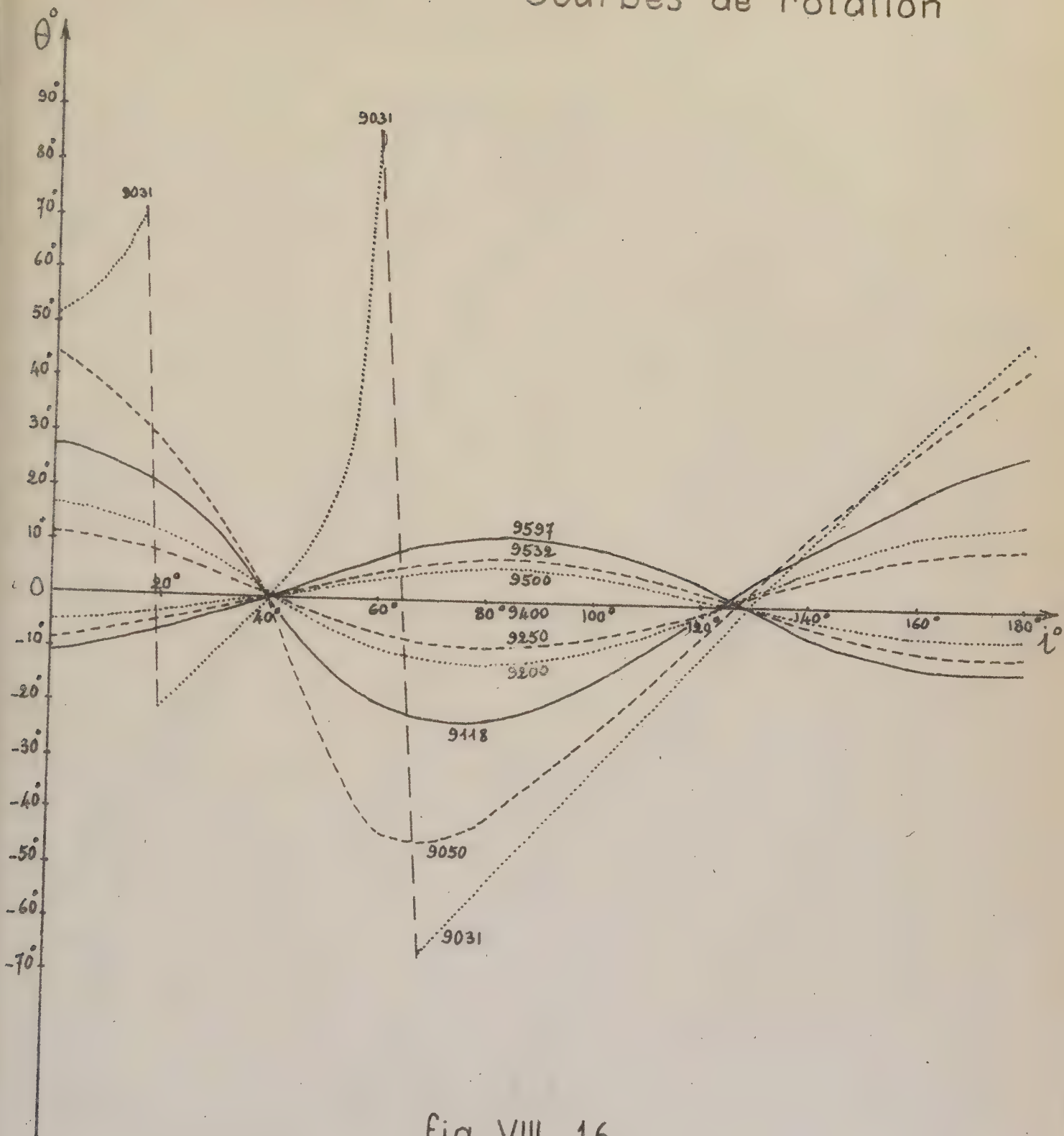


Fig. VIII - 16





# QUARTZ CIII - Courbes de rotation.

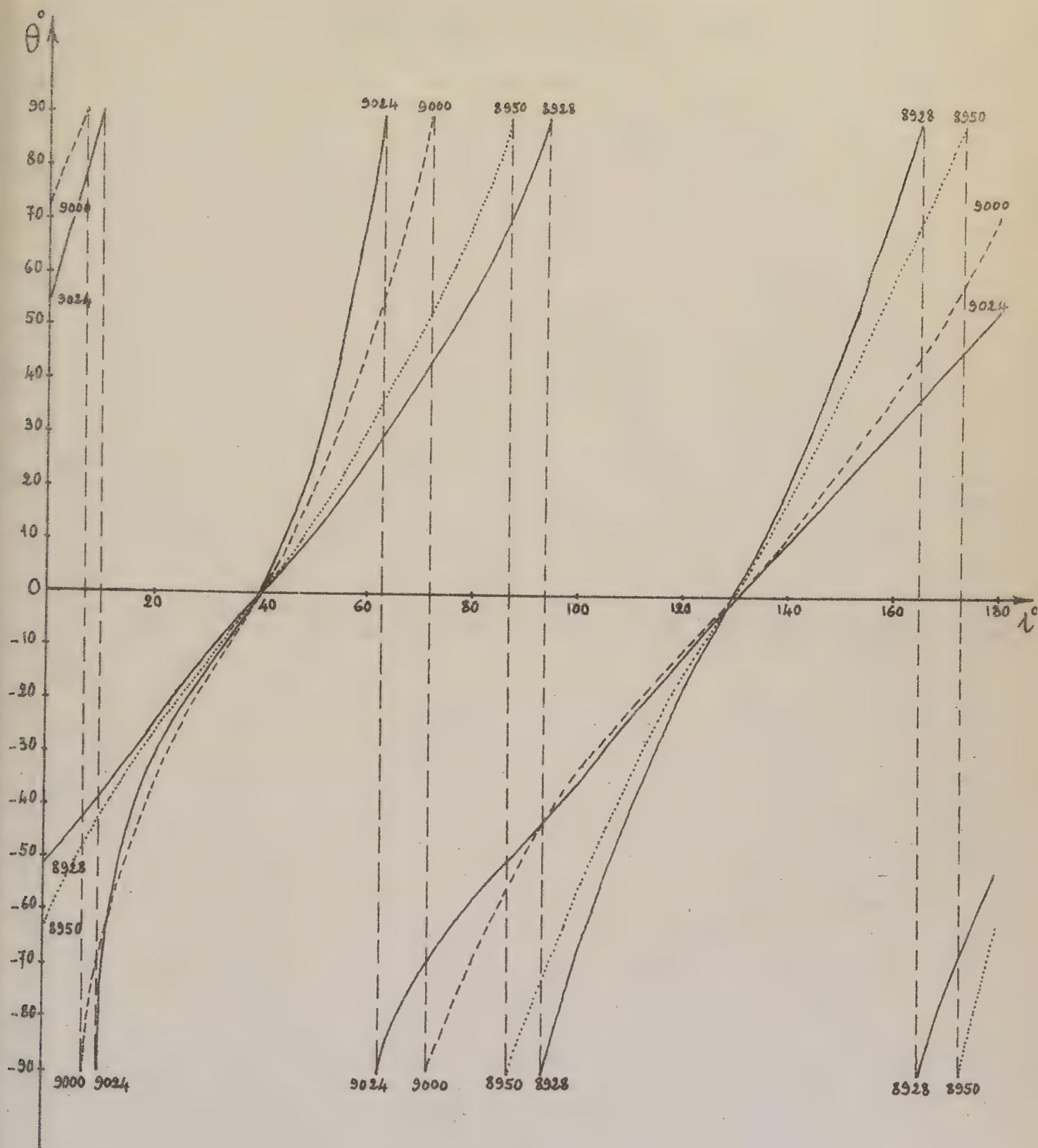


fig. VIII - 17



# QUARTZ CIII

Courbes de rotation.

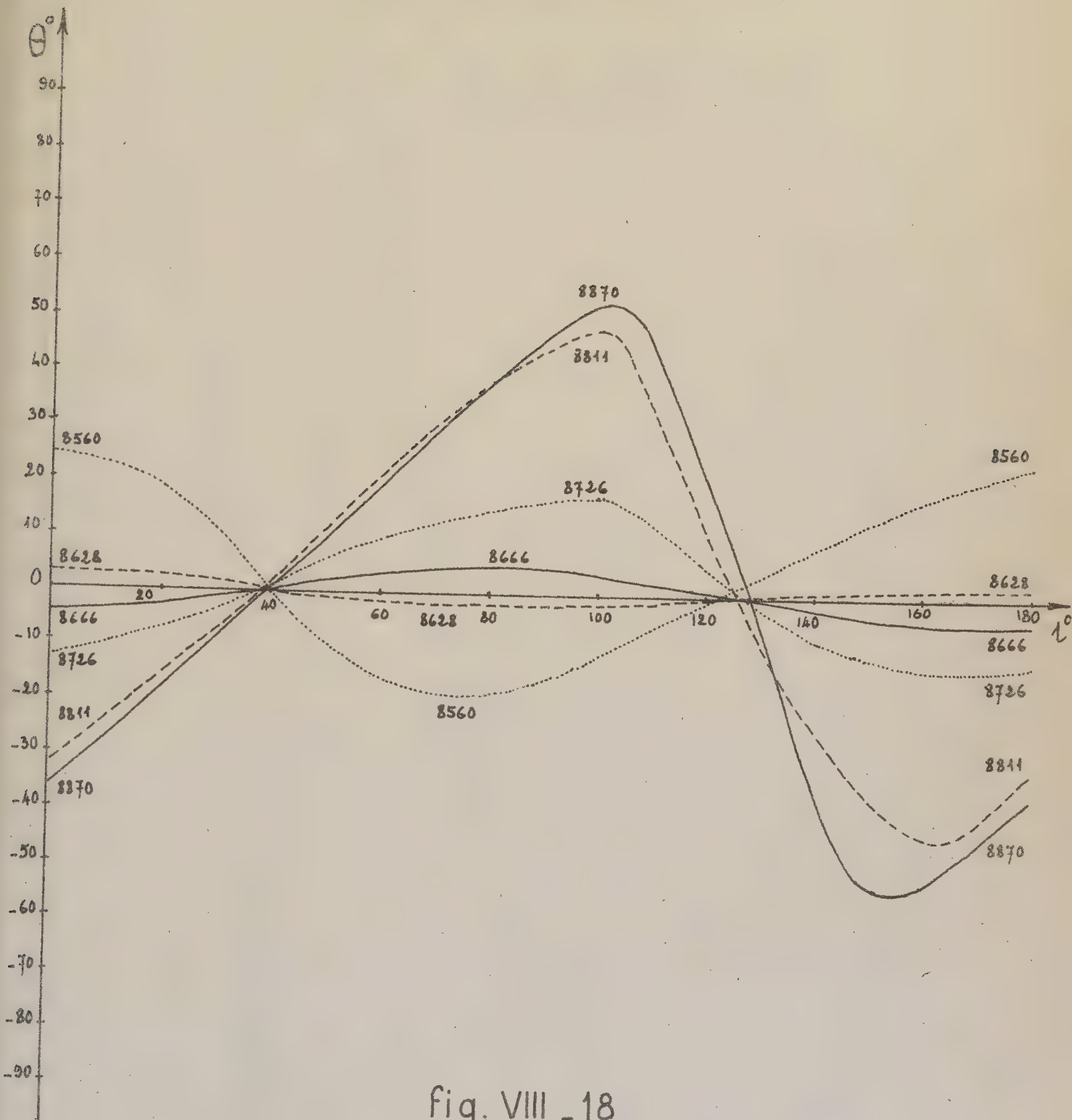


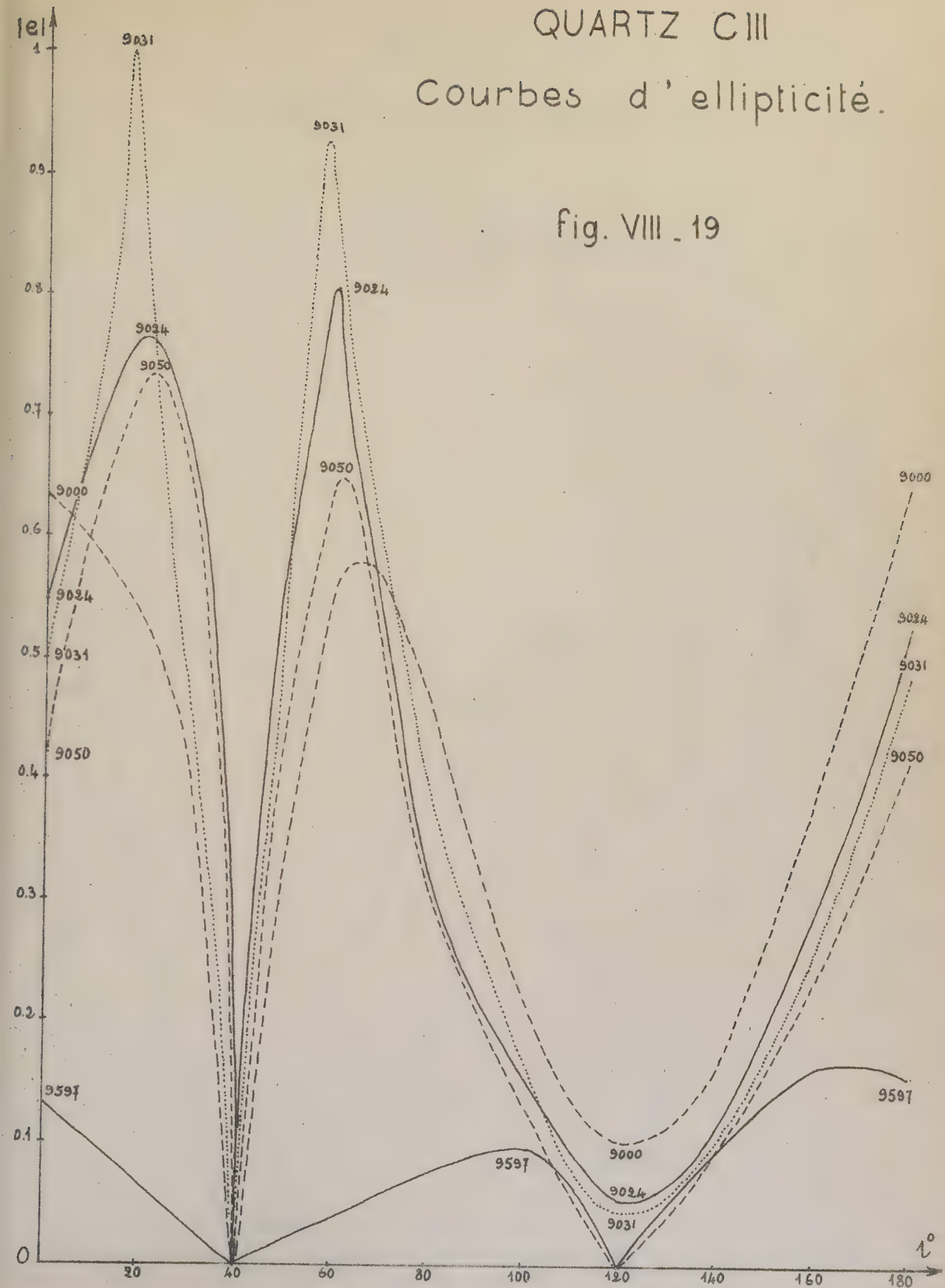
fig. VIII -18



# QUARTZ CIII

Courbes d'ellipticité.

fig. VIII 19



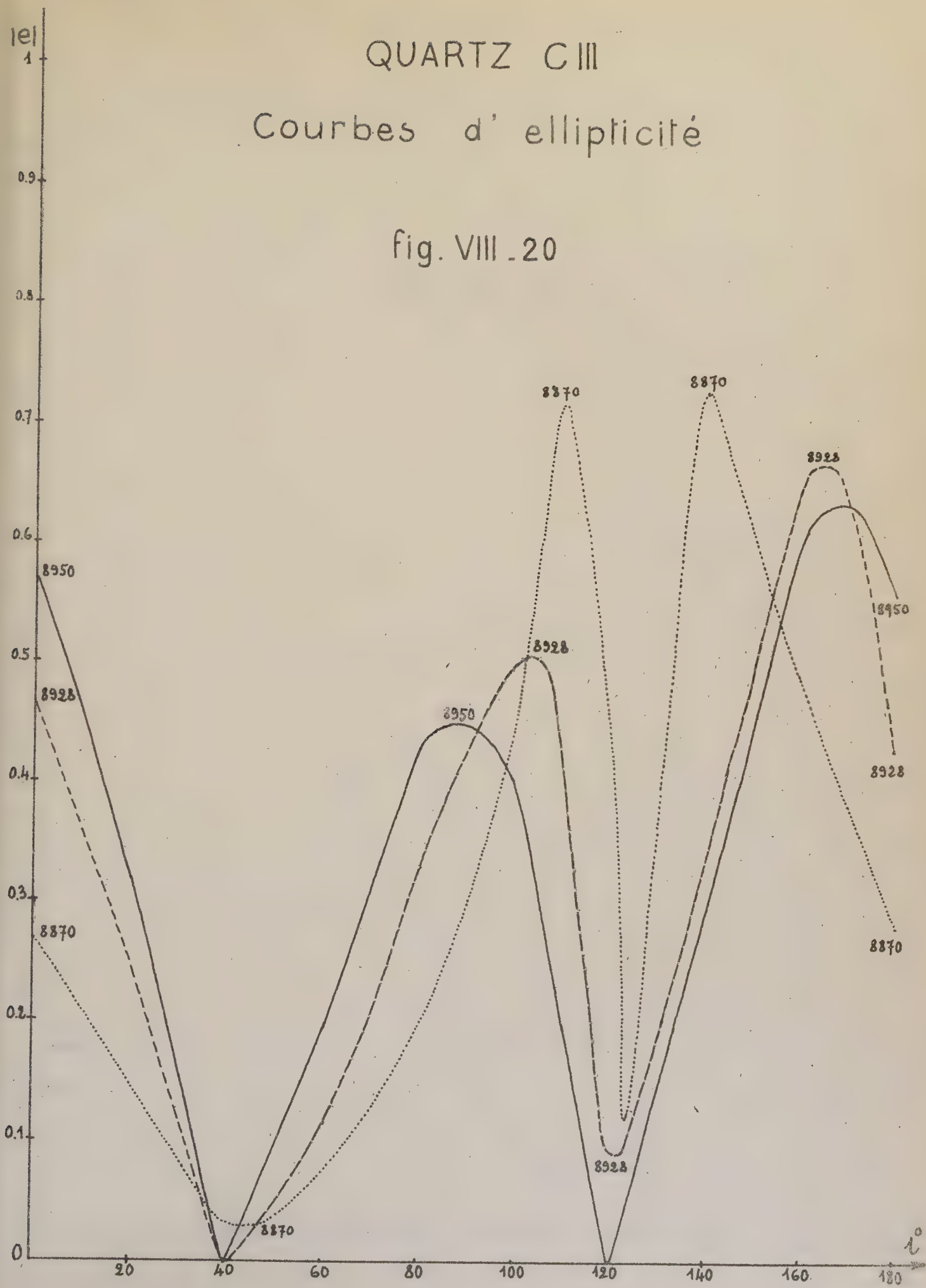




# QUARTZ CIII

## Courbes d'ellipticité

fig. VIII.20

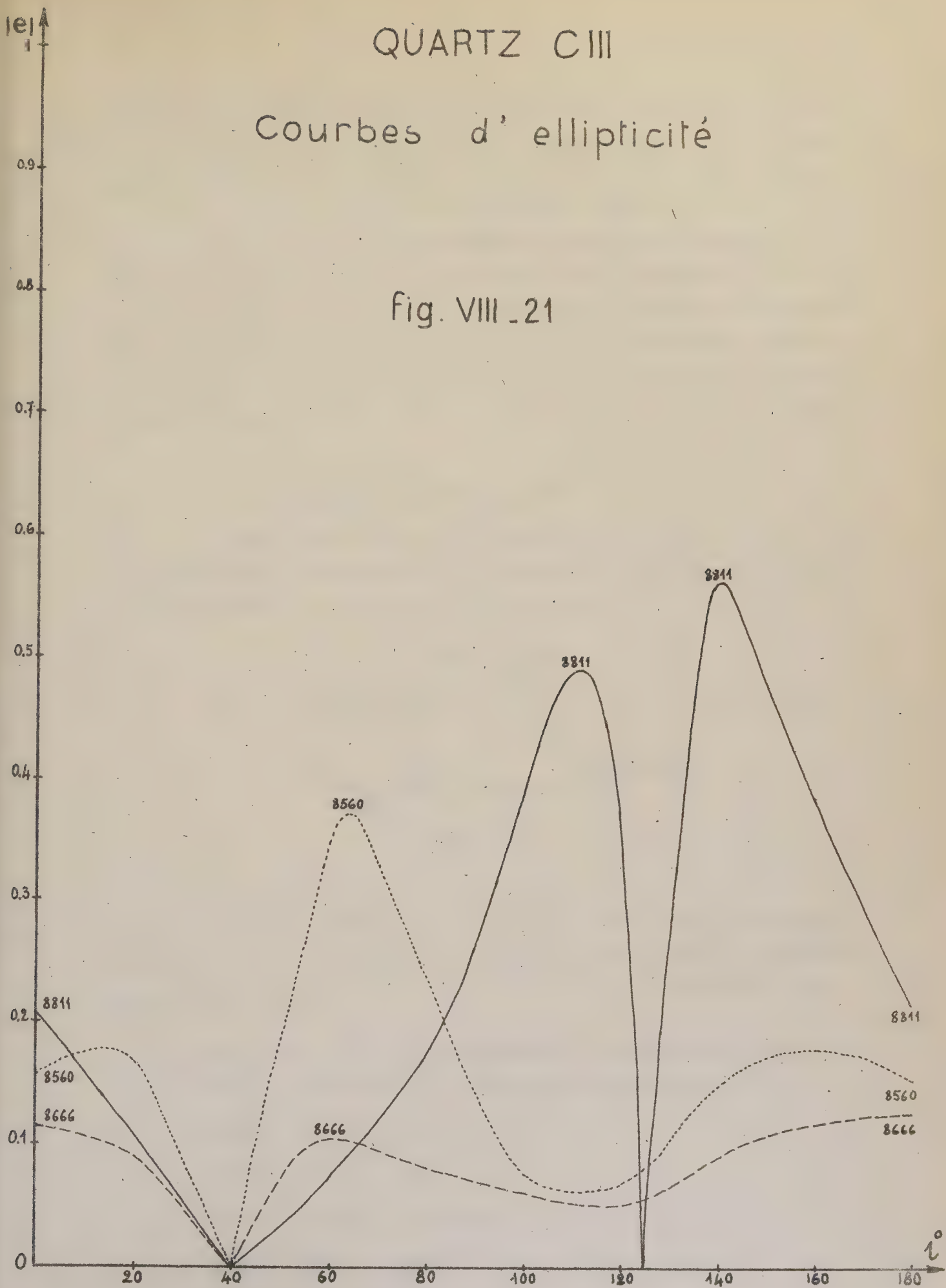




# QUARTZ CIII

Courbes d'ellipticité

fig. VIII 21





ce qui montre bien que le mode  $(TE_{11})'$  ne devient évanescent que pour une fréquence inférieure à la fréquence de coupure du mode  $TE_{11}$ . Les valeurs expérimentales trouvées conduisent ainsi à prendre  $\sqrt{k} = 2,12$ , chiffre supérieur au résultat obtenu dans de récentes recherches (49).

Ceci est dû à notre approximation faite sur l'expression des longueurs d'onde de coupure. En effet, nous avons précédemment indiqué que l'erreur commise en confondant l'expression de la constante de propagation avec celle relative au cas du milieu isotrope est inversement proportionnelle au rayon du guide. Cette approximation se justifie donc d'autant plus que le diamètre du guide est grand, ce qui n'est pas le cas des échantillons étudiés plus haut.

#### B) Cristaux parallélépipédiques (30)

Nous avons étudié huit cristaux de cette forme, dont la taille est indiquée sur la figure VIII - 22, ci-après. Ils sont de section carrée et l'axe optique est parallèle à la face d'entrée.

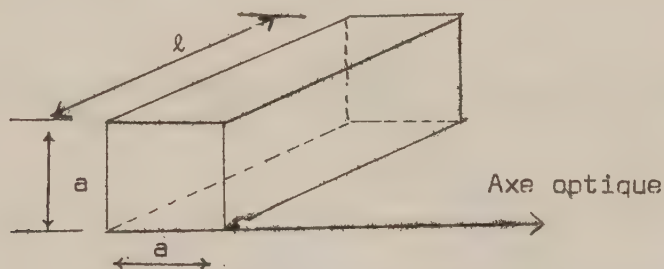


Fig. VIII - 22

Les mesures effectuées ont permis de tracer pour chaque cristal des familles de courbes donnant la rotation  $\theta$  du grand axe de la vibration et l'ellipticité  $|e|$  en fonction de la position  $i$  de l'échantillon pour diverses fréquences.

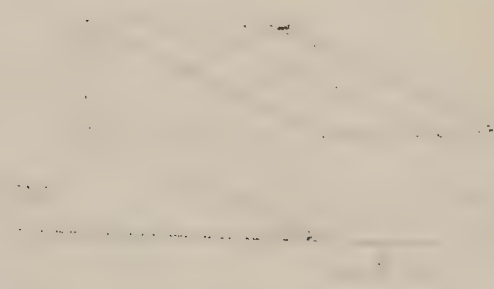
Les figures VIII - 23 à 42 groupent ces résultats pour chaque quartz dont nous donnons ci-dessous les dimensions (en millimètres) :

- Quartz P I    8    x 8   x 15
- Quartz P II   8    x 8   x 20
- Quartz P III 8    x 8   x 25
- Quartz P IV   8    x 8   x 35
- Quartz P V    9,5 x 9,5 x 15

...the ... of ...  
...the ... of ...  
...the ... of ...  
...the ... of ...  
...the ... of ...  
...the ... of ...  
...the ... of ...  
...the ... of ...  
...the ... of ...  
...the ... of ...

...the ... of ...

...the ... of ...  
...the ... of ...  
...the ... of ...



...the ... of ...  
...the ... of ...  
...the ... of ...

...the ... of ...  
...the ... of ...  
...the ... of ...

...the ... of ...  
...the ... of ...  
...the ... of ...



# QUARTZ PI

## Courbes de rotation

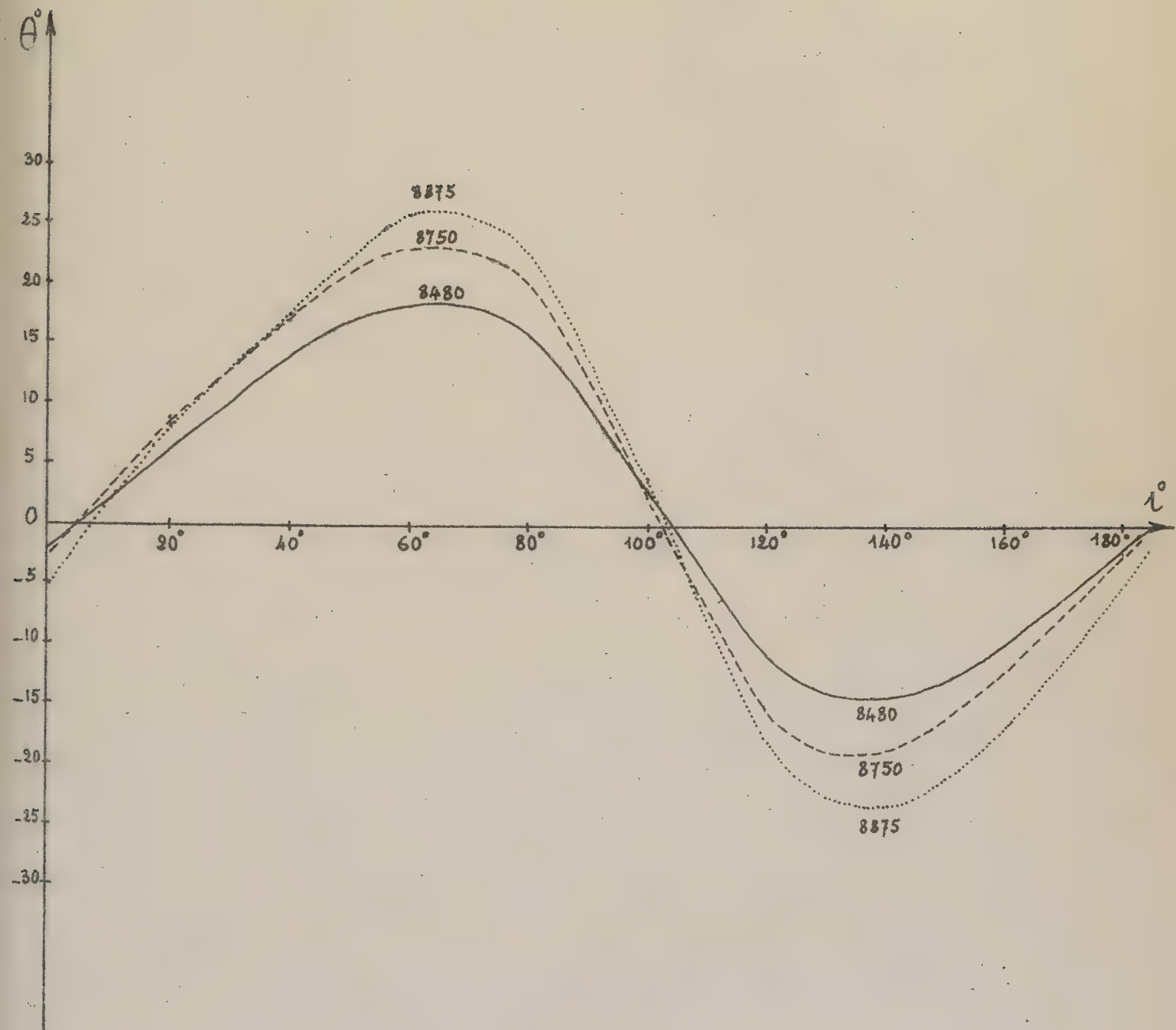


fig. VIII - 23



# QUARTZ PI

## Courbes de rotation

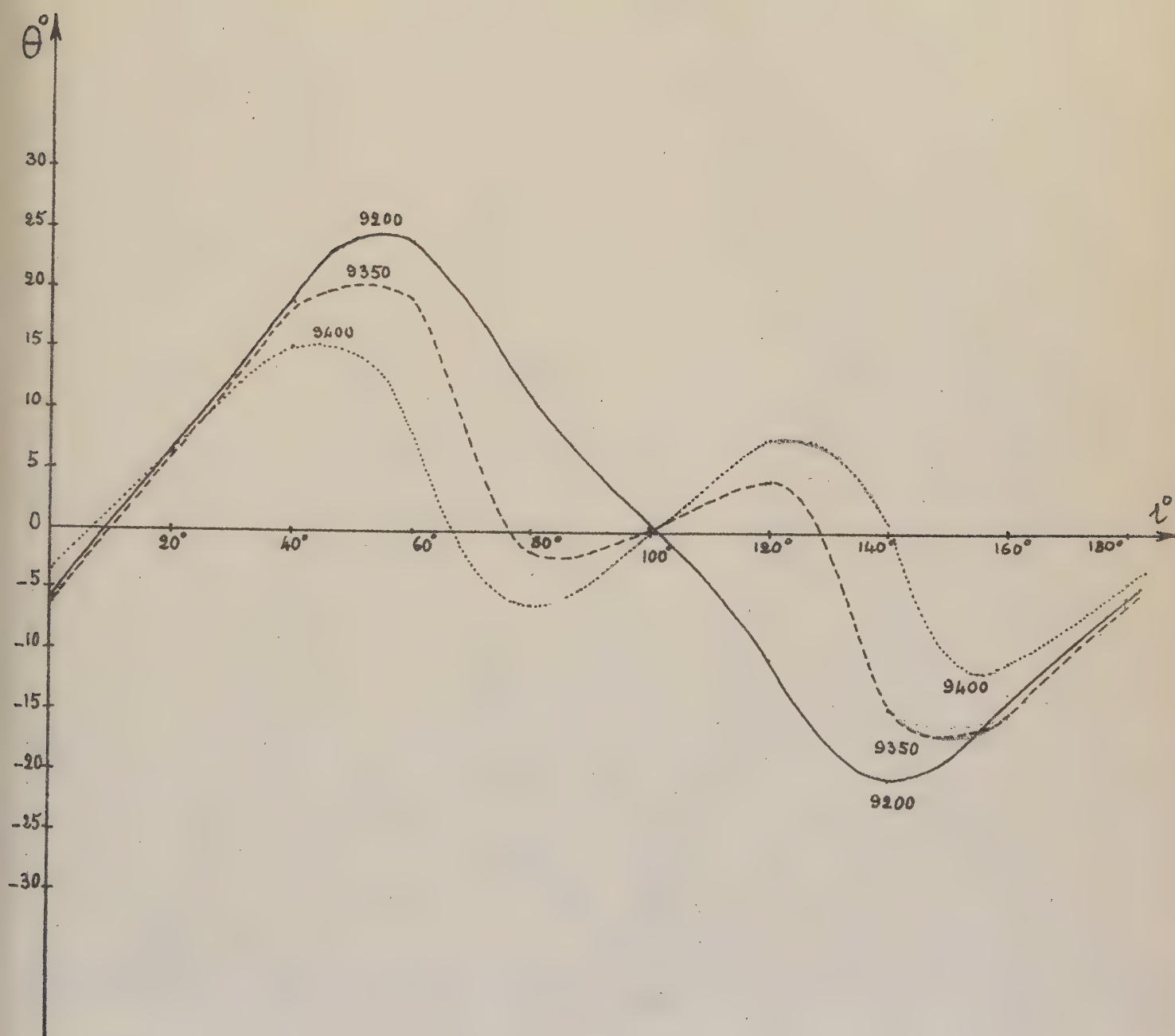


fig. VIII .24



# QUARTZ PI

## Courbes d'ellipticité

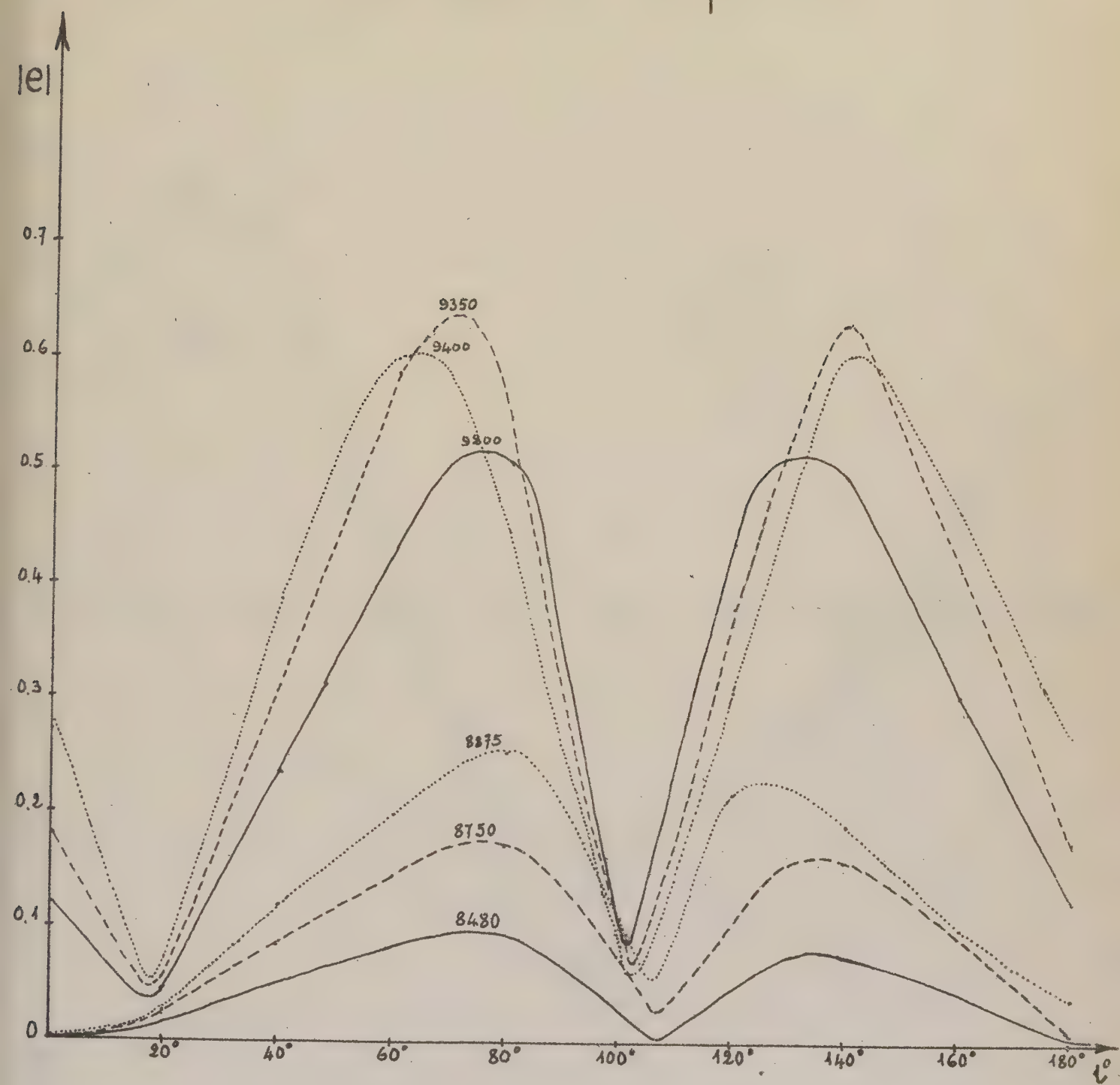


fig. VIII - 25





# QUARTZ PII

## Courbes de rotation

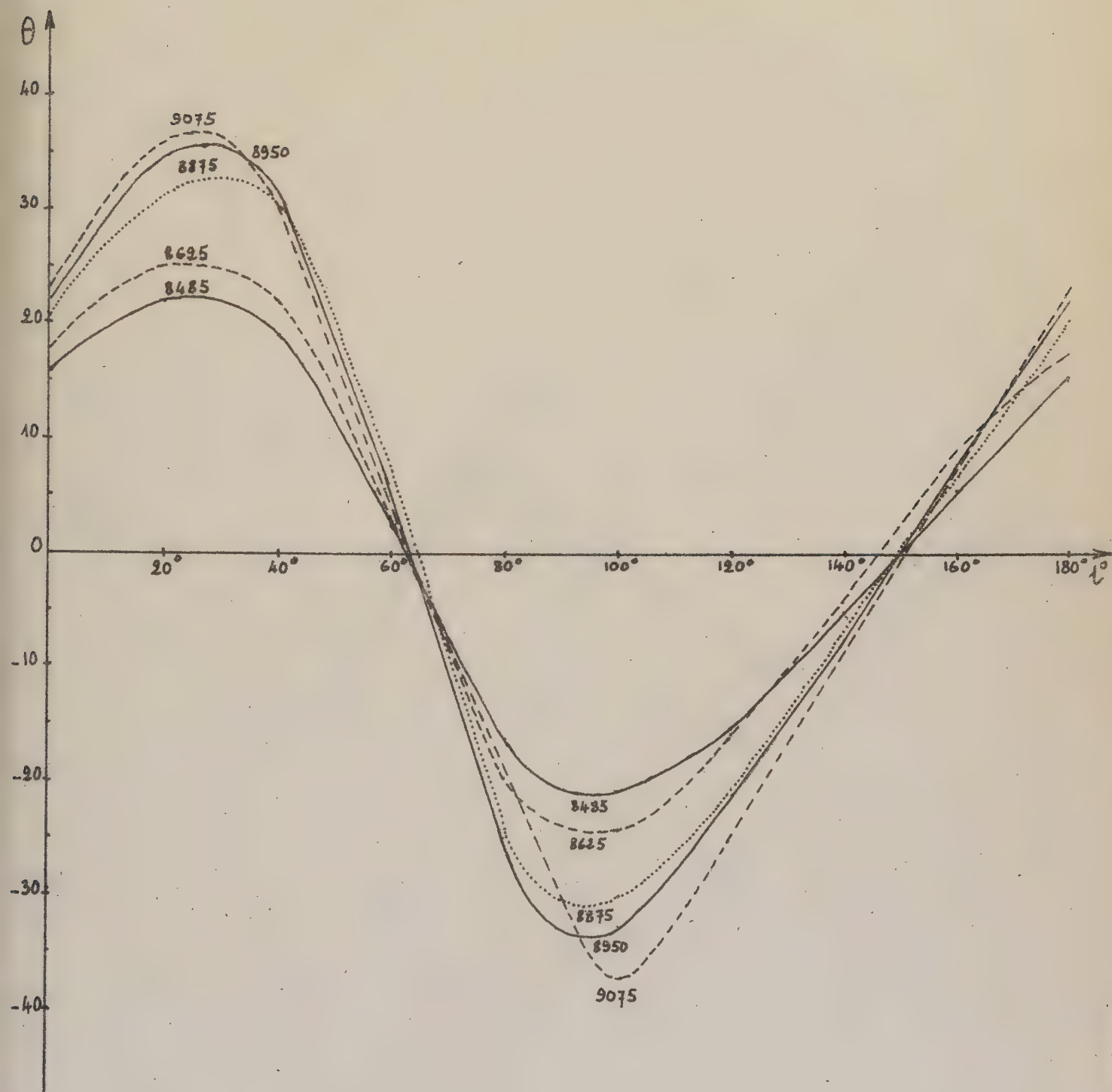


Fig. VIII -26



# QUARTZ PII

## Courbes de rotation

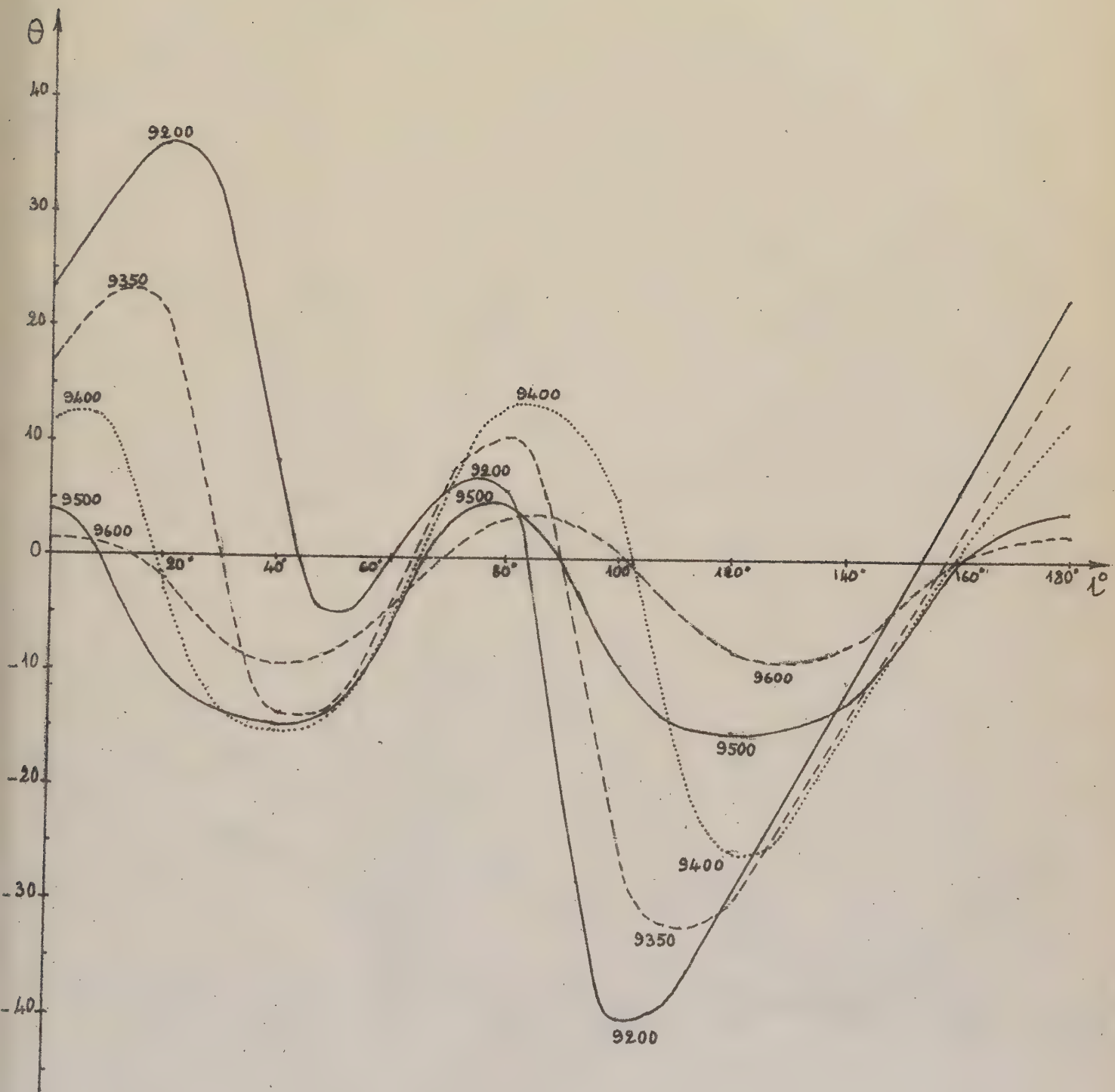


fig. VIII -27



# QUARTZ PII

## Courbes d'ellipticité

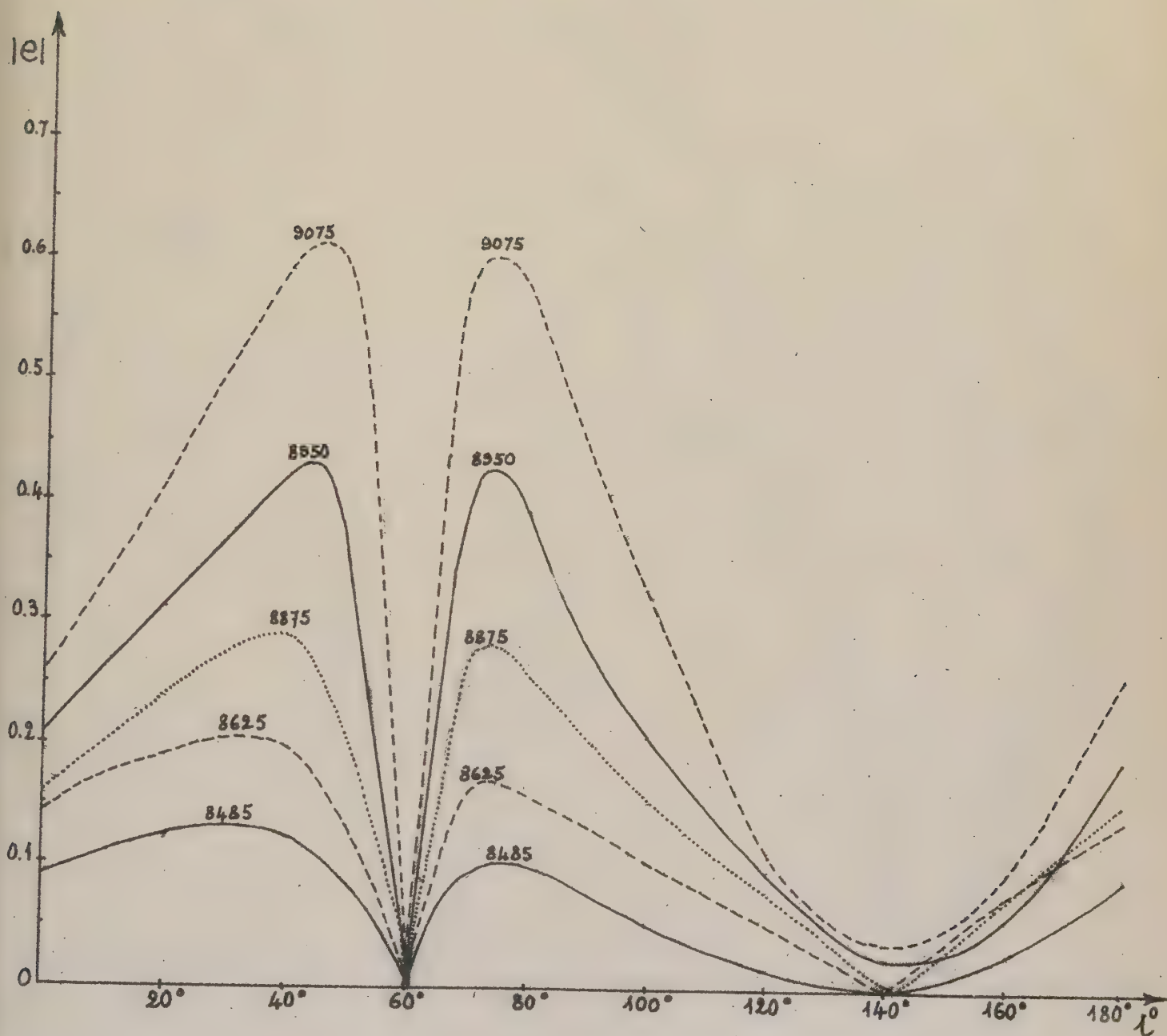


fig. VIII . 28





# QUARTZ PII

## Courbes d'ellipticité

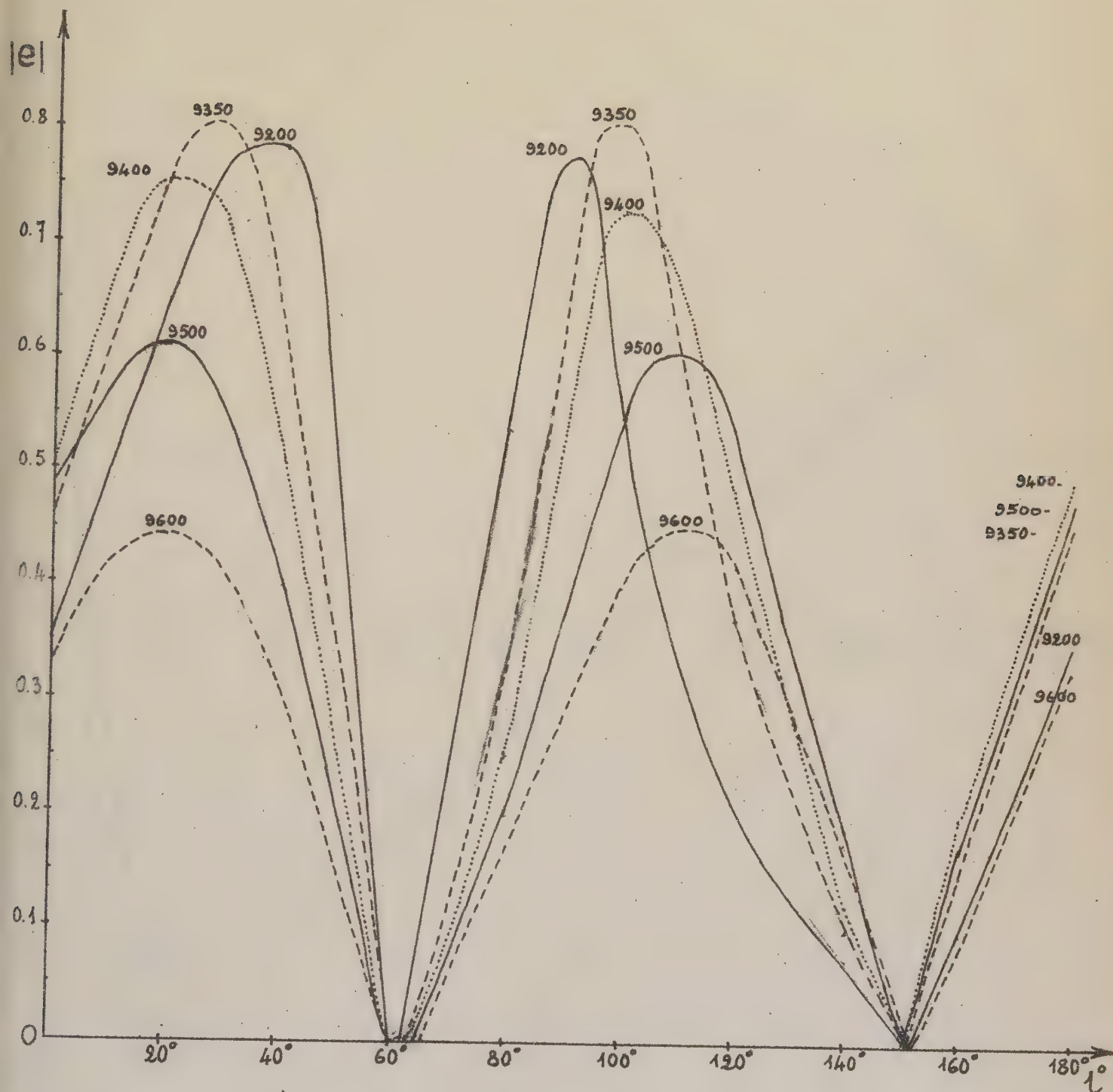


fig. VIII .29



# QUARTZ P III

## Courbes de rotation

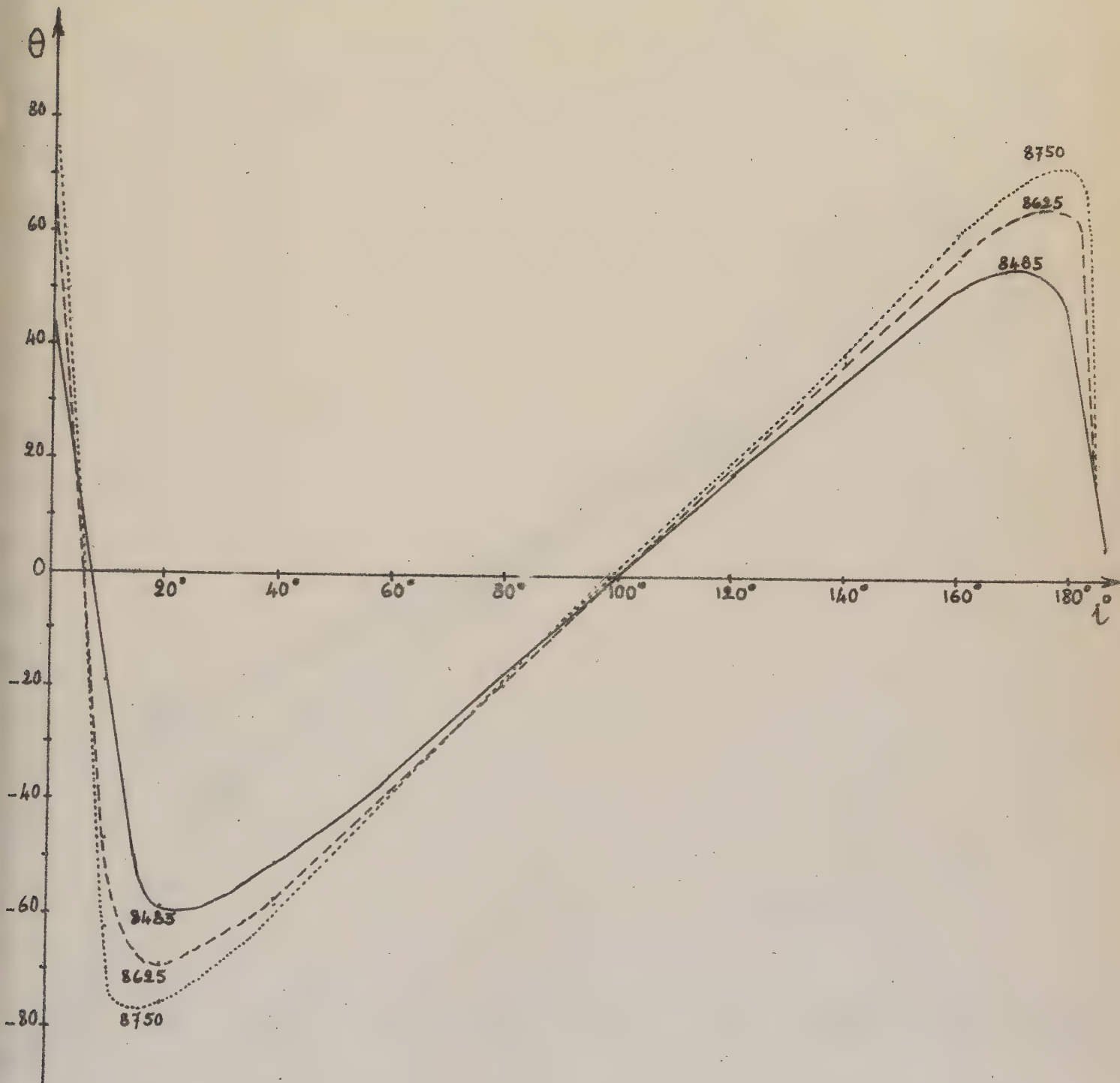


fig. VIII - 30



# QUARTZ P III

## Courbes de rotation

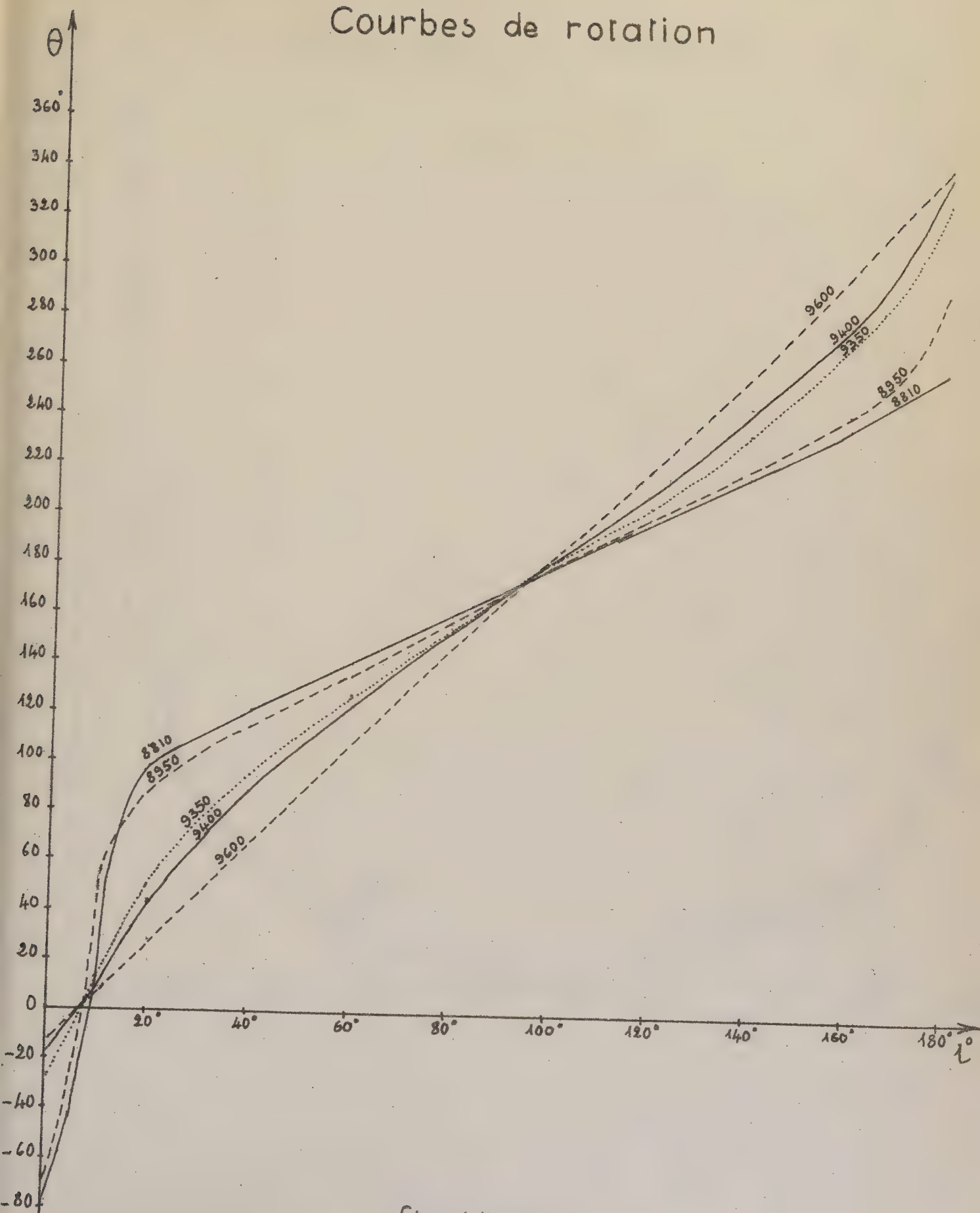


fig. VIII - 31





# QUARTZ P III

Courbes d'ellipticité

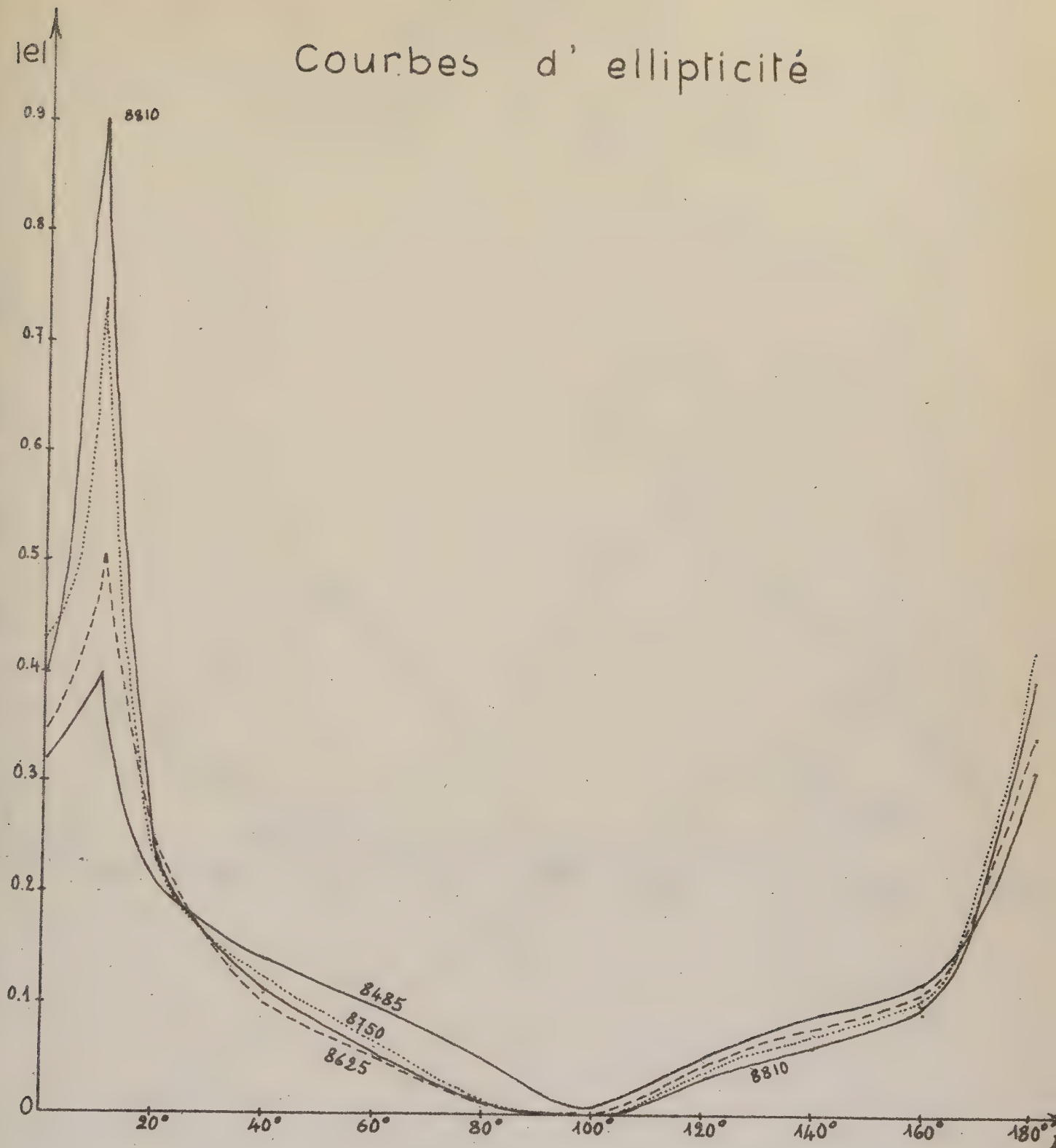


fig. VIII .32



QUARTZ P III  
Courbes d'ellipticité

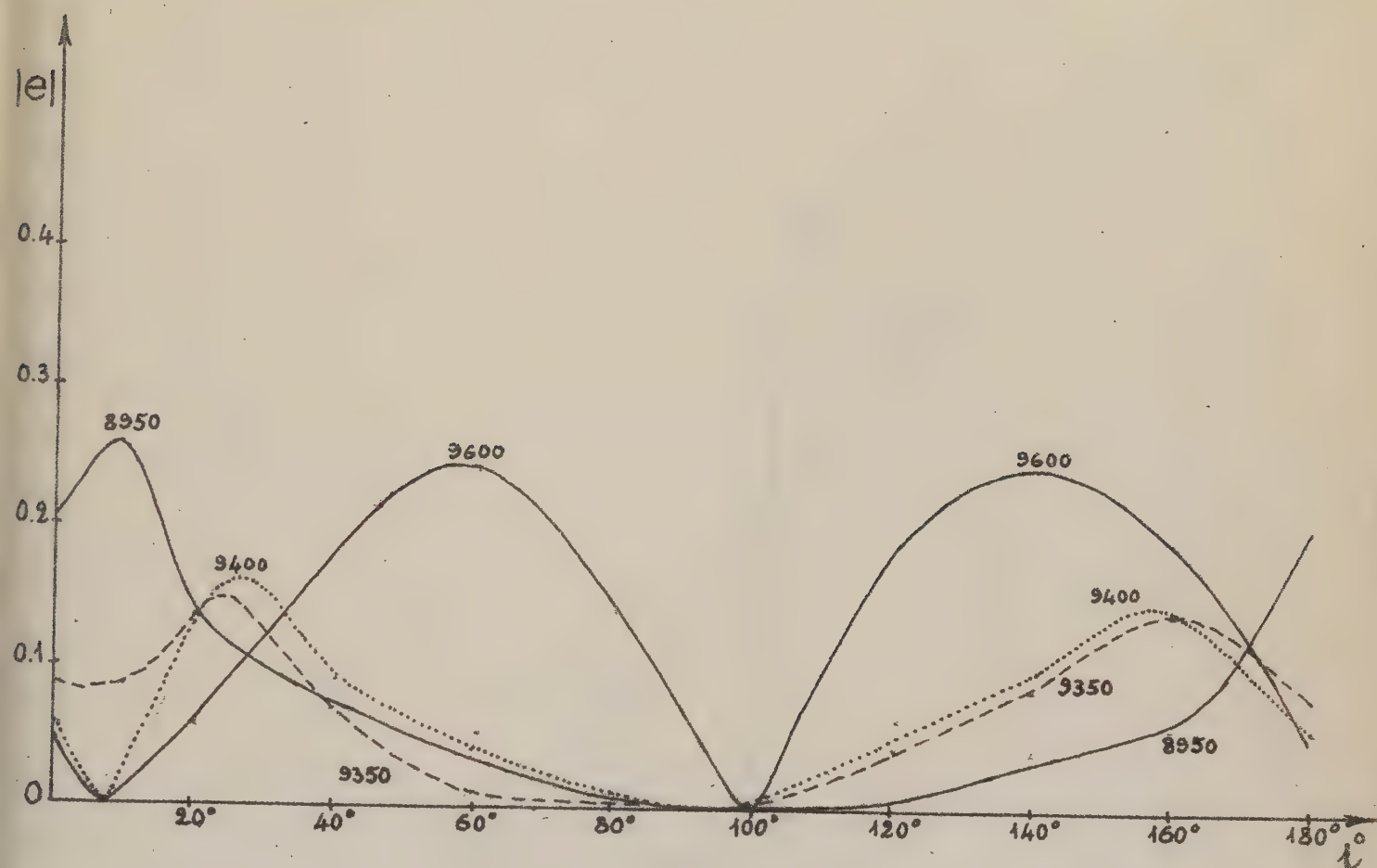


fig. VIII\_33



# QUARTZ P IV

Courbes de rotation

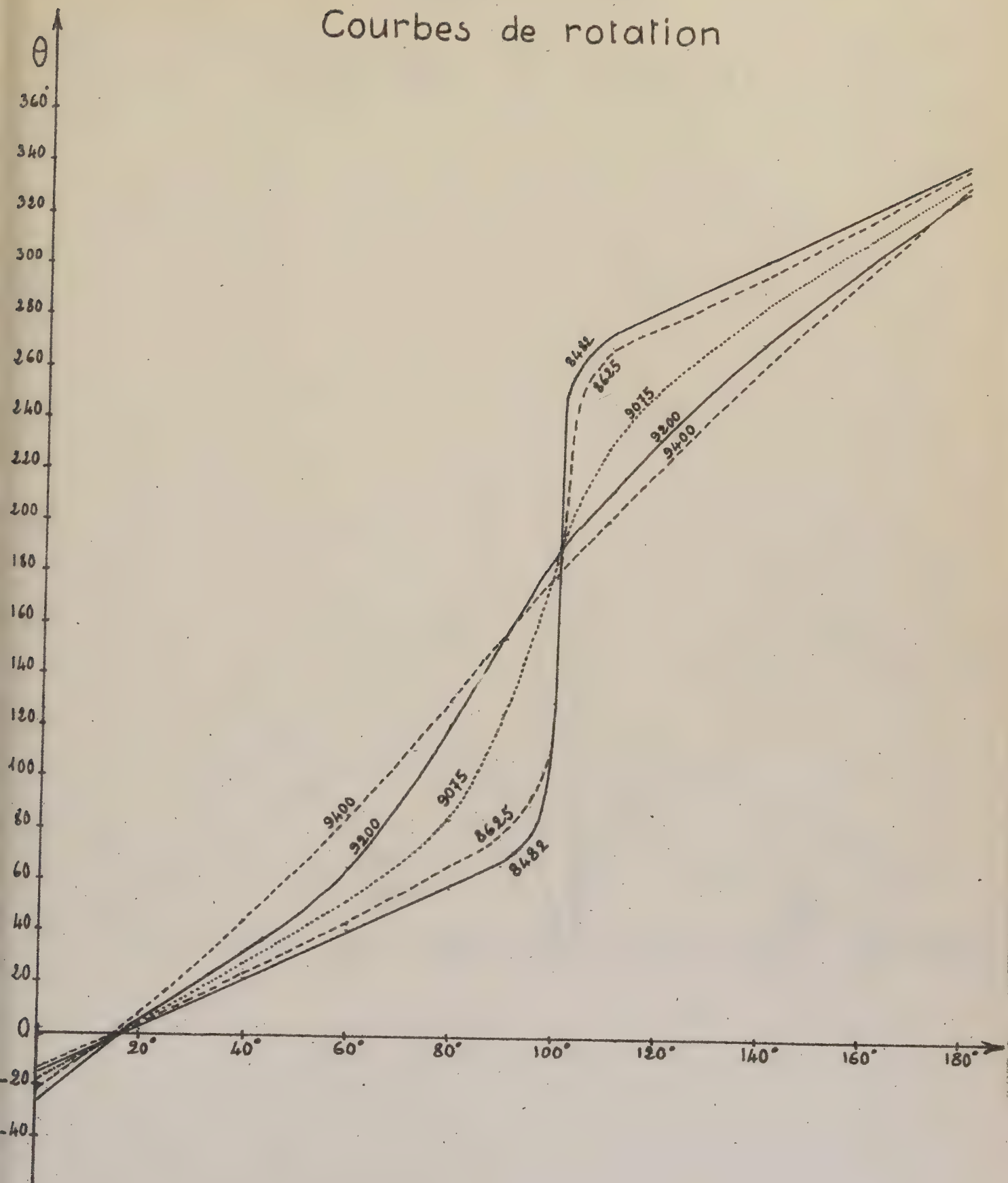


fig. VIII .34





# QUARTZ PIV

## Courbes d'ellipticité

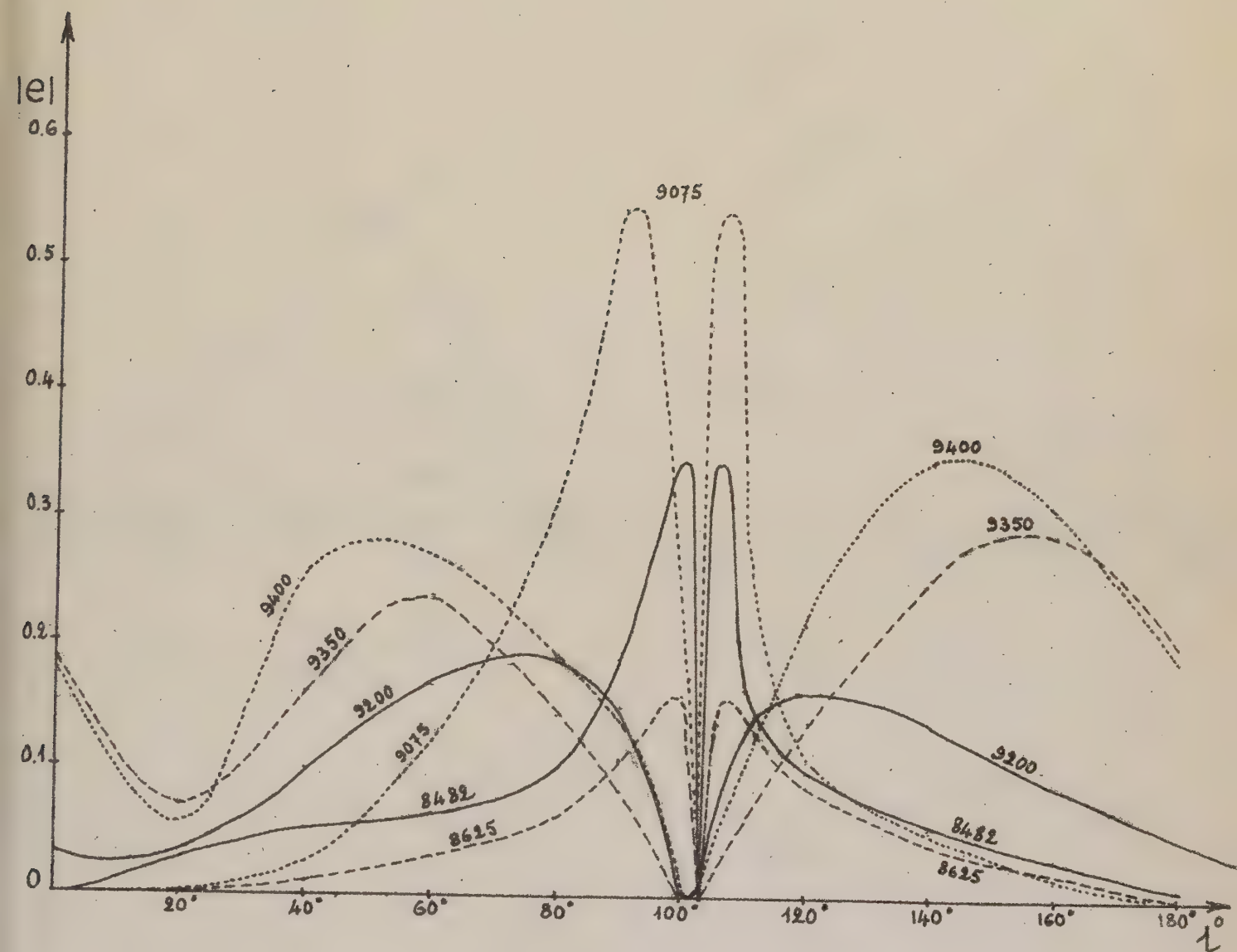


fig. VIII -35



# QUARTZ P V

## Courbes de rotation

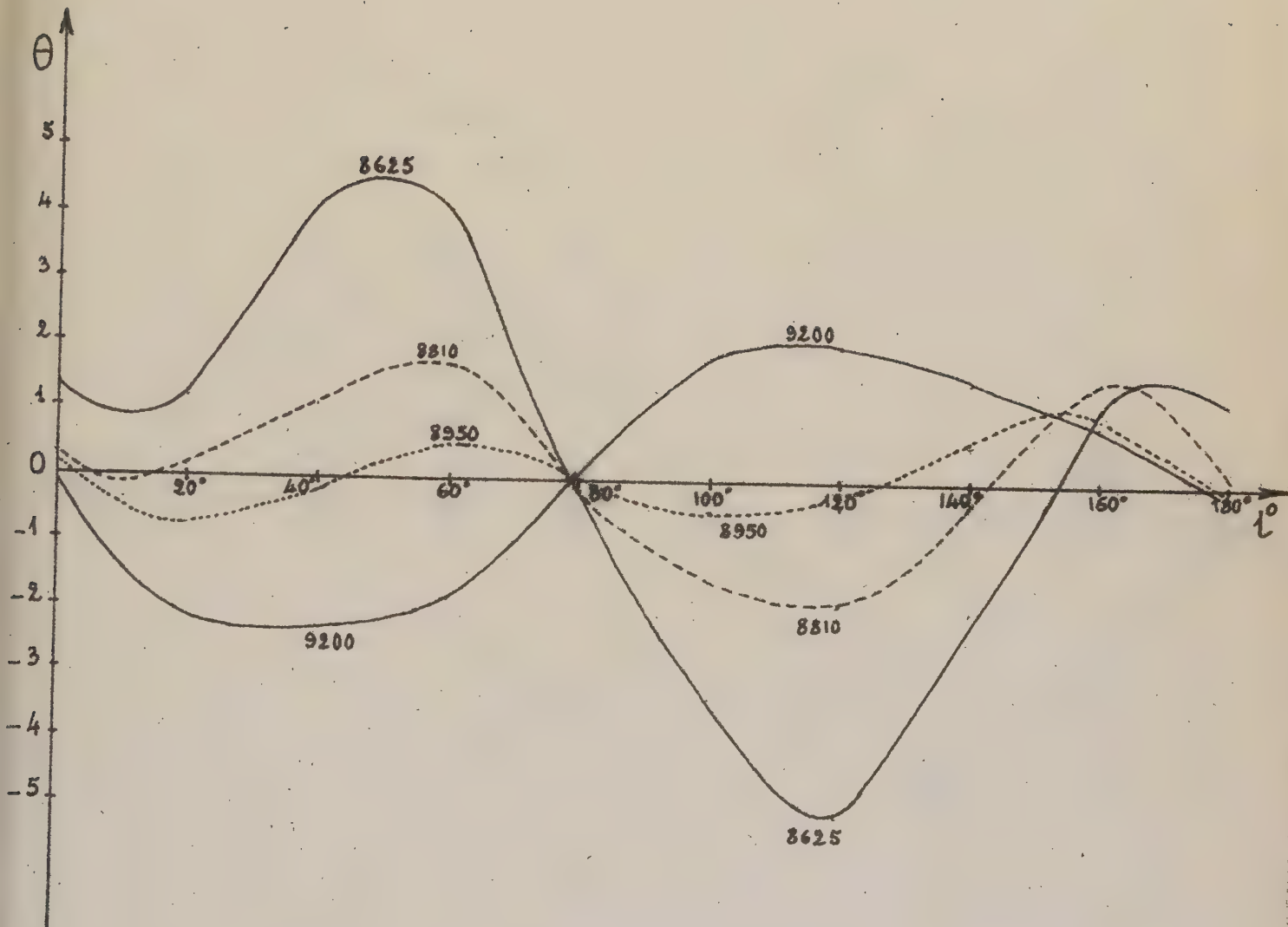


fig. VIII -36



# QUARTZ P VI

## Courbes de rotation

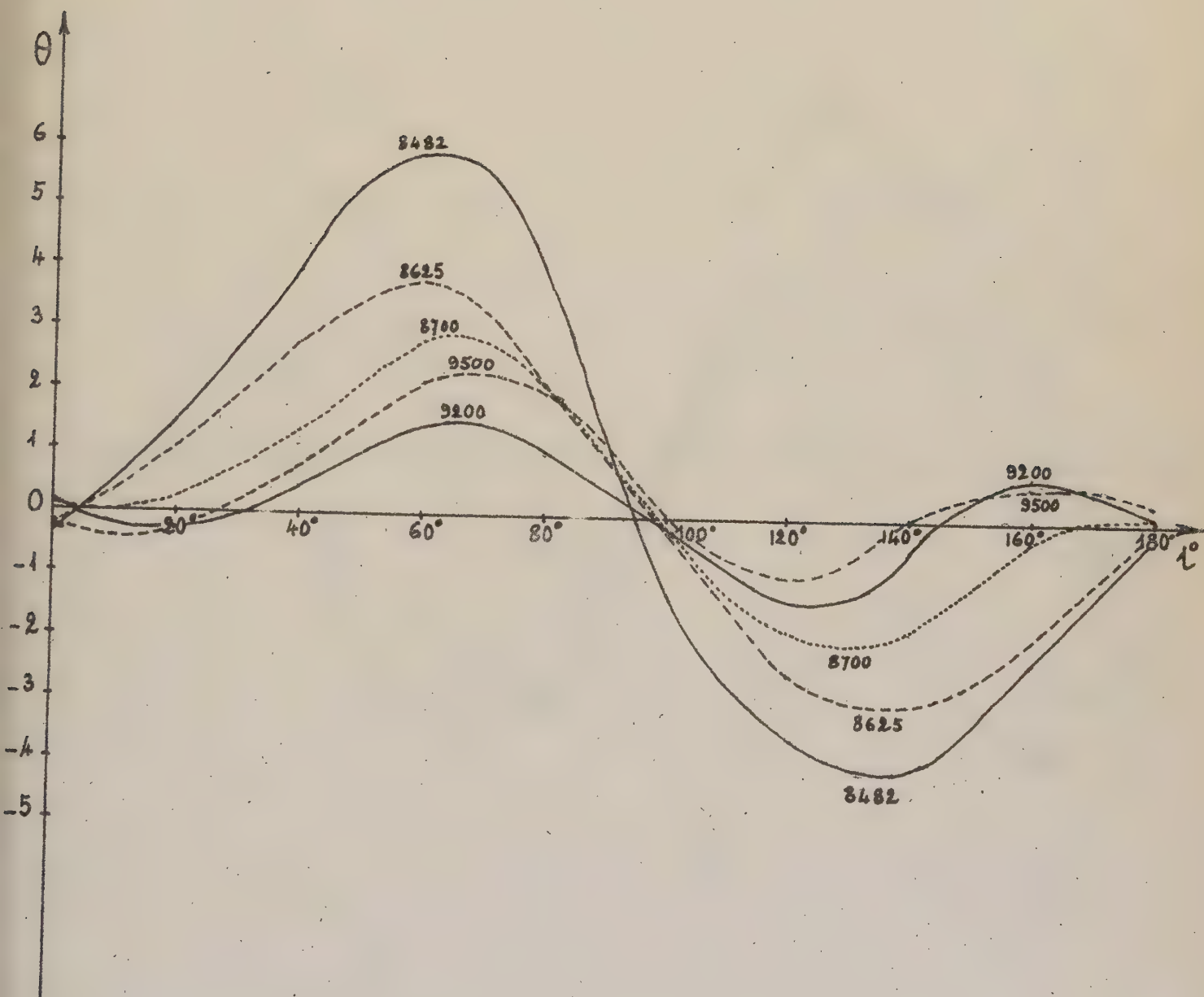


Fig. VIII -37





# QUARTZ P VII

## Courbes de rotation

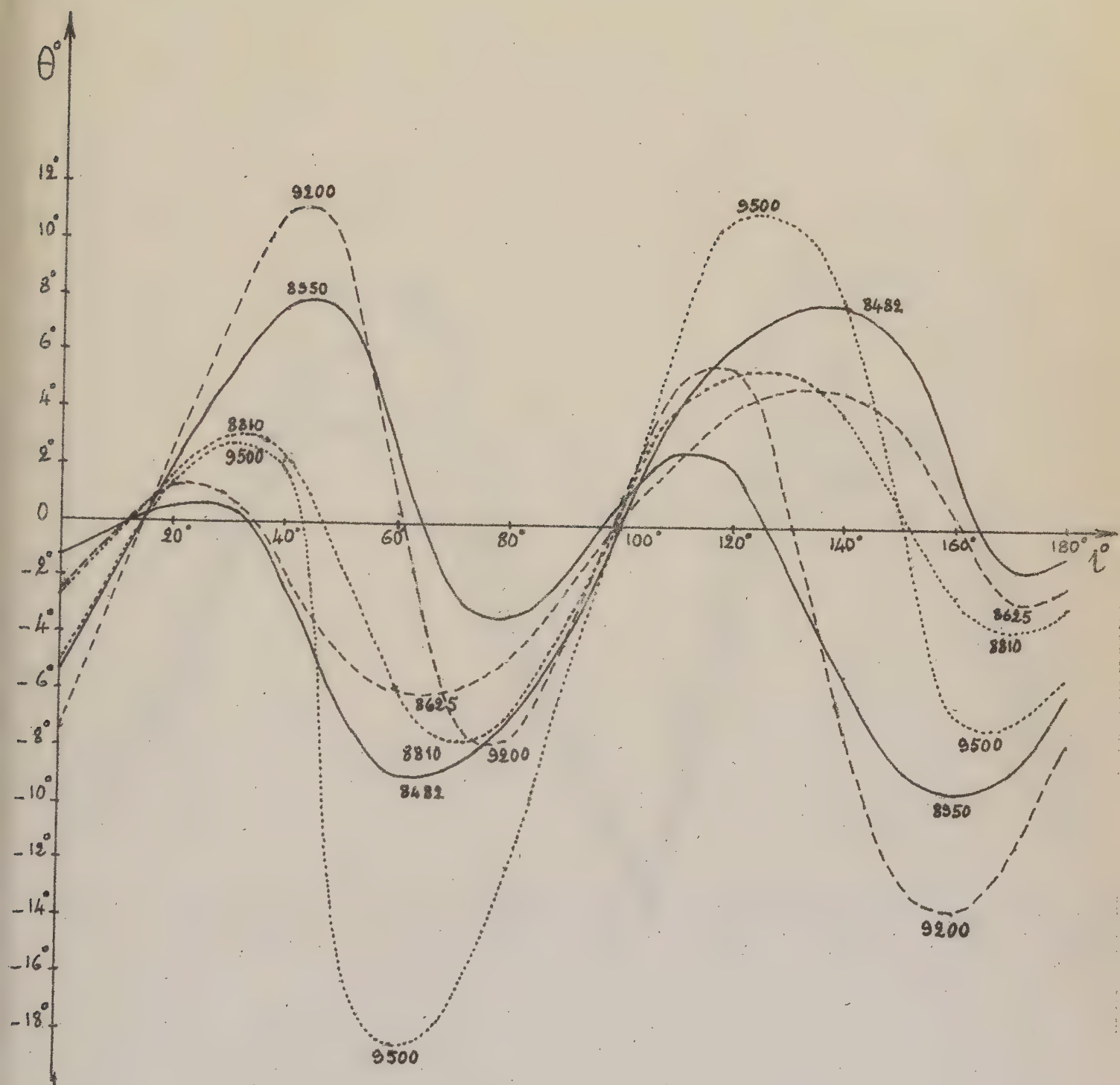


fig. VIII - 38



# QUARTZ P VII

## Courbes d'ellipticité

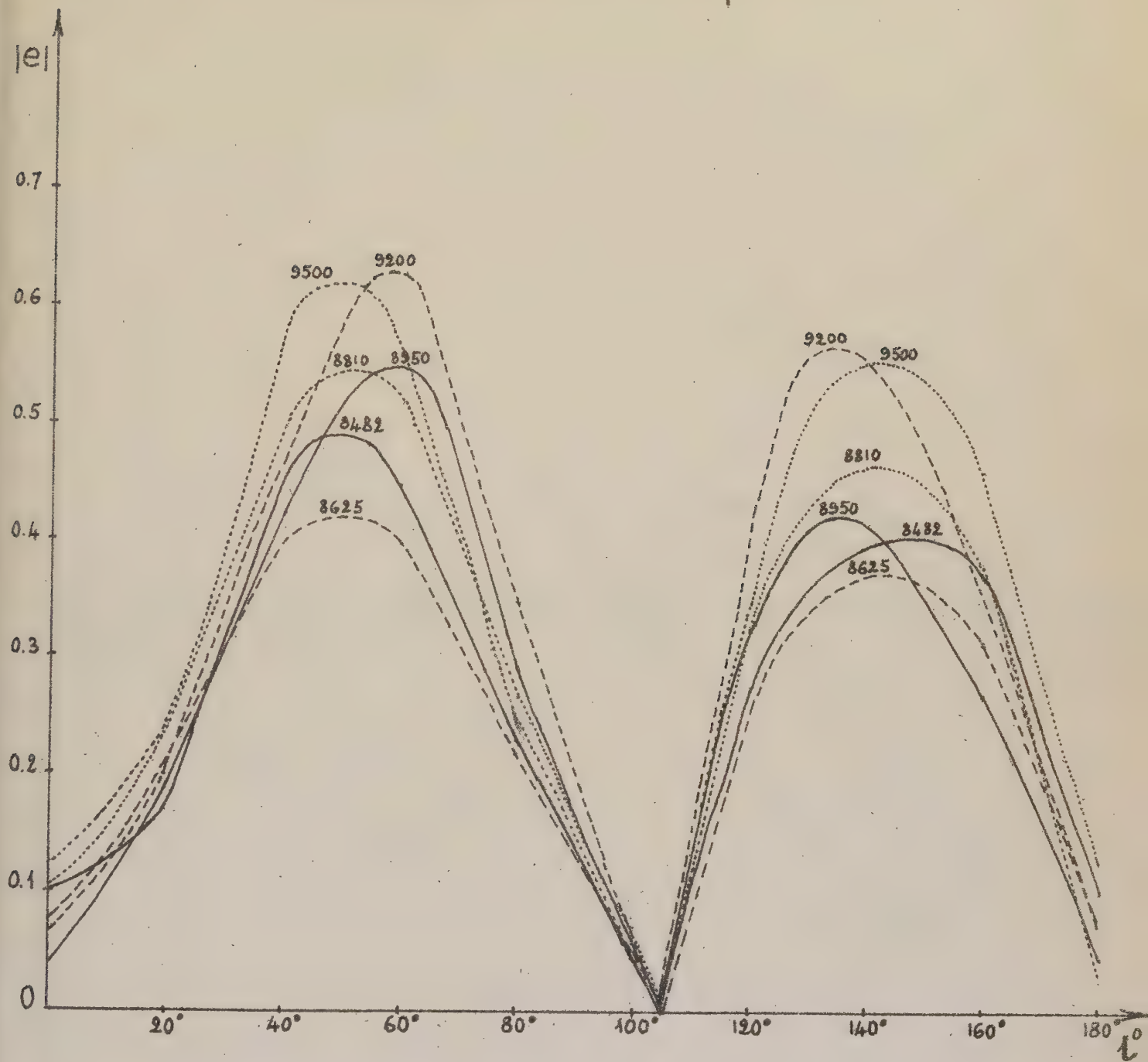


fig. VIII\_39



# QUARTZ P VIII

## Courbes de rotation

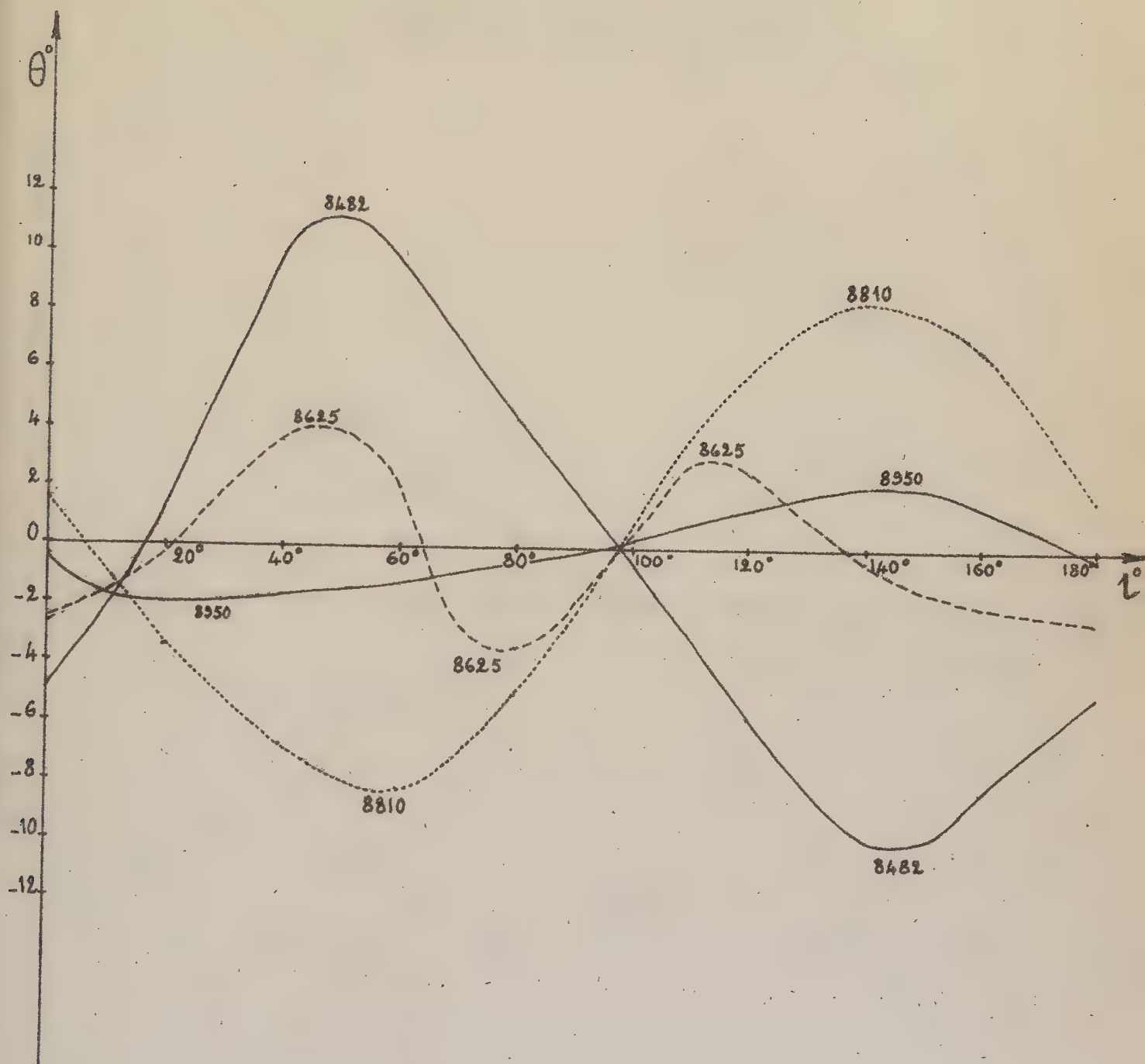


fig. VIII - 40





# QUARTZ P VIII

## Courbes de rotation

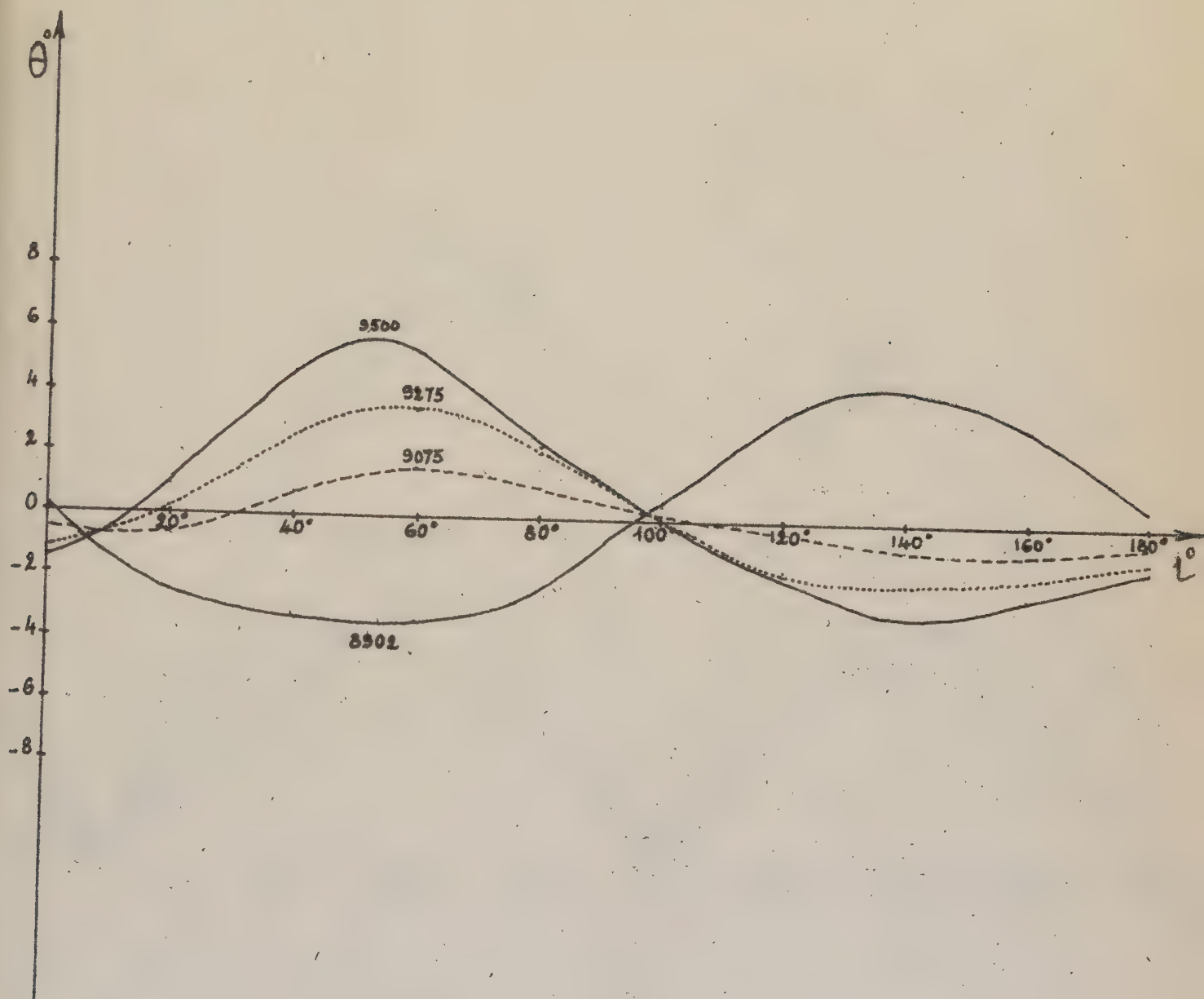


fig. VIII - 41



# QUARTZ P VIII

## Courbes d'ellipticité

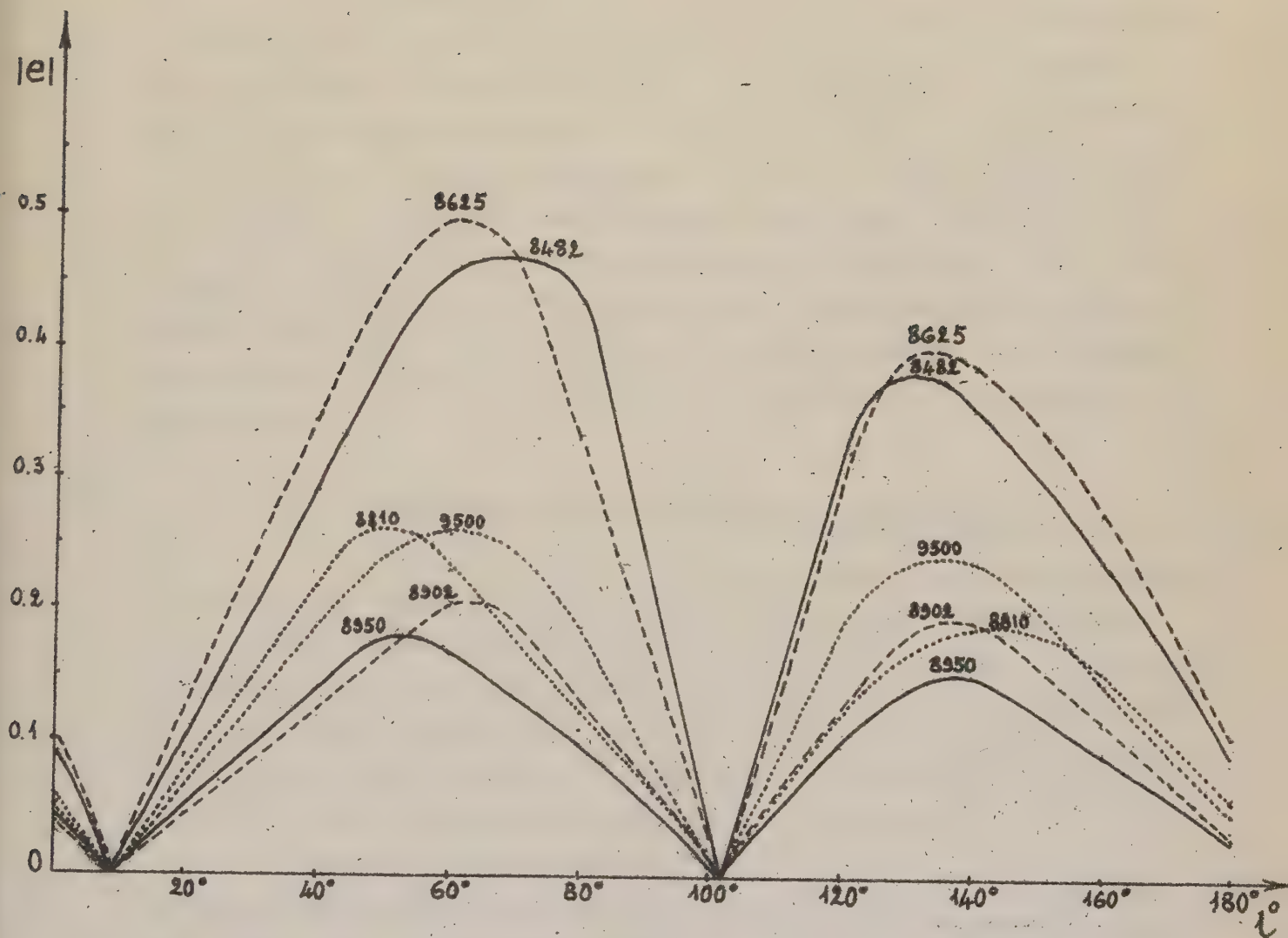


fig. VIII - 42



- Quartz P VI 9,5 x 9,5 x 20
- Quartz P VII 9,5 x 9,5 x 25
- Quartz P VIII 9,5 x 9,5 x 35

Il faut remarquer que certaines courbes présentent des irrégularités qui nous paraissent être dues à des défauts de cristallisation des échantillons, et que nous n'avons pas tracé les courbes d'ellipticité lorsque cette dernière était très faible.

Les courbes montrent clairement, à la précision de la taille près, l'existence des lignes neutres confondues avec les axes de coordonnées et ceux du cristal. On vérifie également, comme il était prévu théoriquement, que les perturbations apportées à l'onde croissent avec la longueur de l'échantillon. La théorie indique aussi que pour des constantes diélectriques données, la différence des longueurs d'onde guidée croît quand les dimensions transversales diminuent, sans toutefois atteindre celles correspondant à l'apparition d'ondes évanescences. L'expérimentation le confirme : on peut constater en effet que, lorsque la section diminue, la différence de phase croît, entraînant l'apparition de rotations et d'ellipticités plus importantes.

### III - CRISTAUX DE QUARTZ CYLINDRIQUES DE GRAND DIAMETRE (42 - 49)

Les échantillons examinés provenaient de différentes origines et étaient pour certains parfaitement polis et de taille piézoélectrique X ou Y. Cette diversité d'états de surface et de position de l'axe mécanique ou électrique nous avait été suggérée par l'éventualité de phénomènes piézoélectriques (79). L'identité des résultats obtenus pour des échantillons de même longueur nous a montré que le phénomène de biréfringence n'était pas entâché d'erreurs que d'autres causes auraient pu produire.

En effet, la différence de taille et de poli aurait dû perturber les éventuelles vibrations mécaniques du cristal soumis au champ électrique hyperfréquence. La longueur des cylindres varie de 10 mm à 40 mm, et l'on constate que les effets (rotation et ellipticité) sont d'autant plus importants qu'elle est grande. Cependant, il faut remarquer que même pour les échantillons les plus longs, il existe des fréquences où la rotation est pratiquement nulle, quelle que soit la position du cristal. Nous ne donnerons pas les courbes relatives à chaque échantillon et nous nous contenterons de joindre celles concernant les quartz C IV et C V de longueur respective 30 mm et 40 mm (figures VIII - 43 à 35).





# QUARTZ CIV

## Courbes de rotation

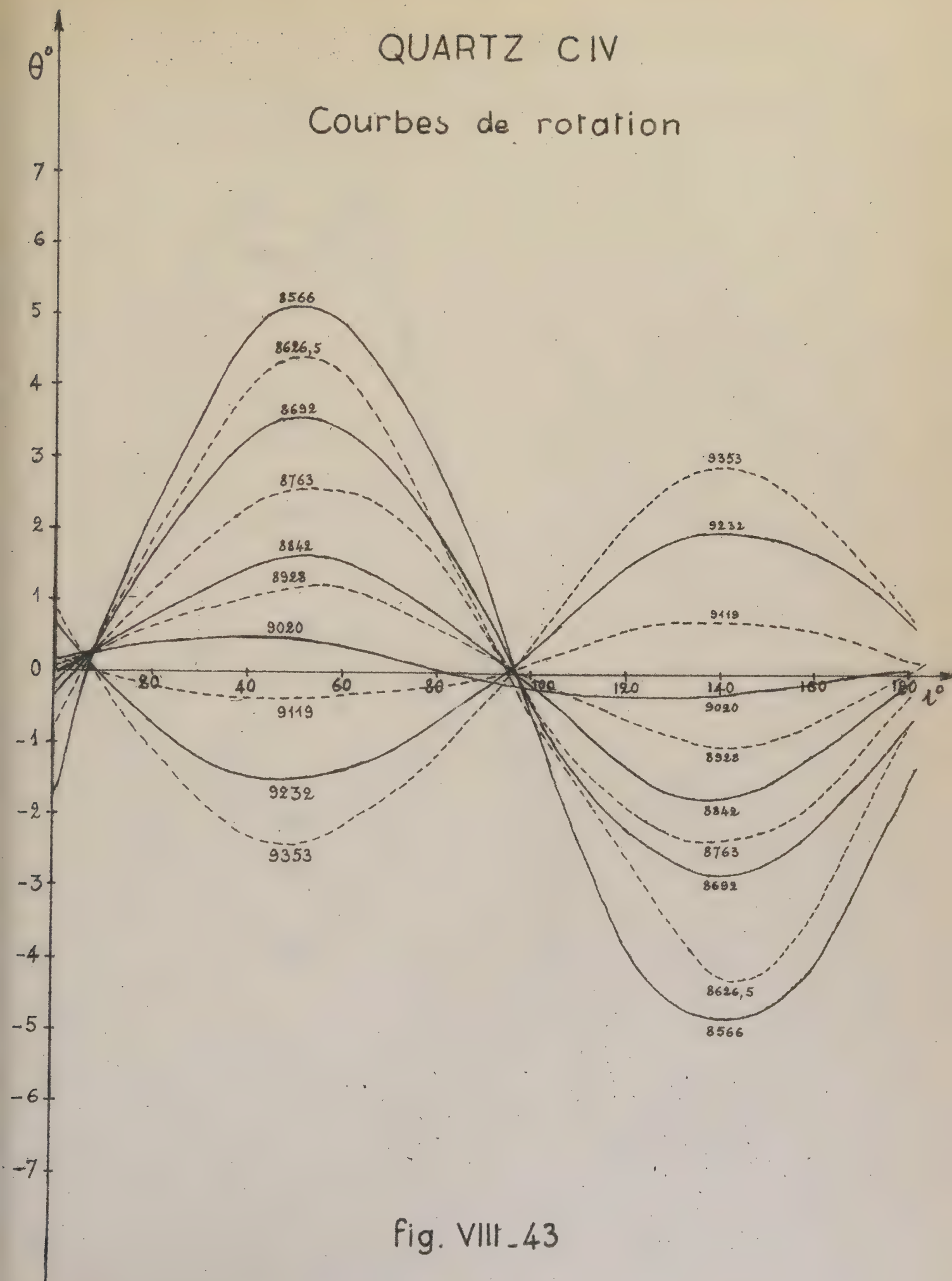


fig. VIII-43



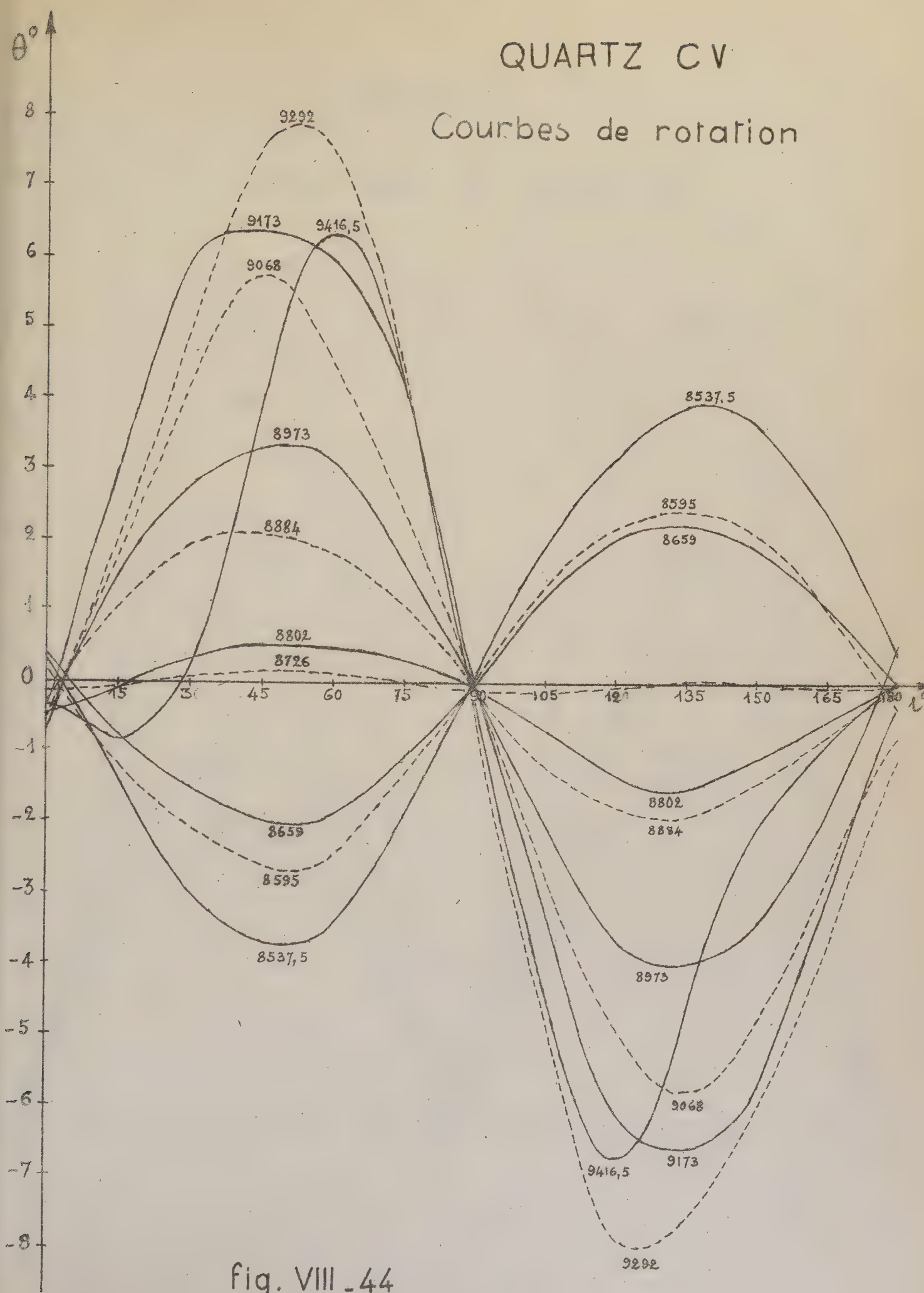


fig. VIII - 44



# QUARTZ CV

## Courbes d'ellipticité

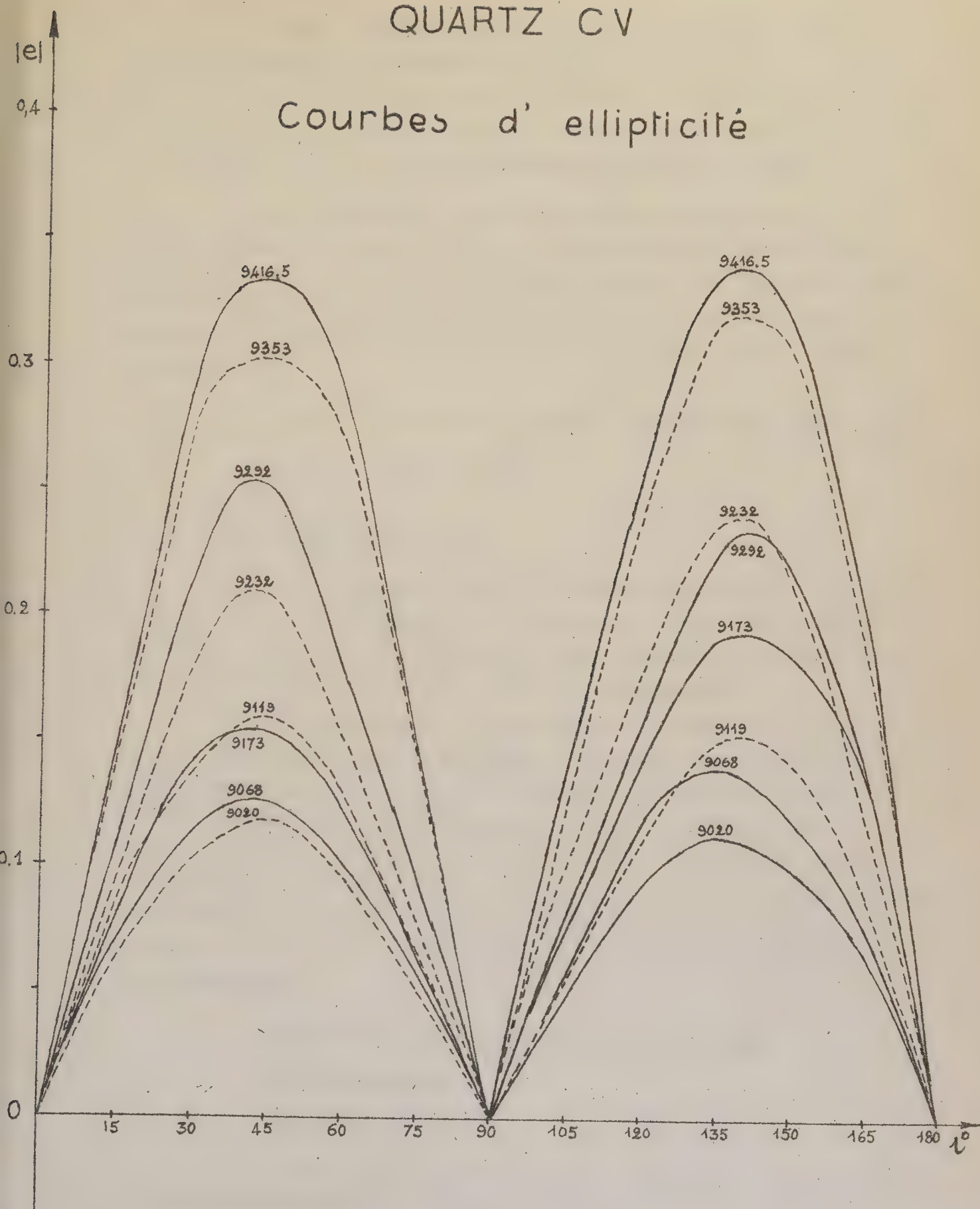


fig. VIII 45





Un calcul théorique simplifié a été déduit de celui exposé aux chapitres III et V. Conformément aux résultats expérimentaux, on admet qu'il n'y a pas d'absorption et que les valeurs des permittivités relatives sont très proches l'une de l'autre. On les écrit sous la forme  $\epsilon_m \pm \Delta\epsilon_m$ , et on suppose que l'équation de propagation isotrope est valable.

Dans ces conditions, une rotation nulle, quel que soit  $i$ , conduit à une relation indépendante de  $\Delta\epsilon_m$ . La valeur moyenne  $\epsilon_m$  ainsi trouvée permet de tracer à l'aide d'un calculateur numérique des familles de courbes de rotation et d'ellipticité en fonction de  $\Delta\epsilon_m$ . Il suffit alors de les comparer aux courbes expérimentales pour en déduire la valeur la plus probable de  $\Delta\epsilon_m$ .

Ce travail (49) donne les résultats suivants pour le quartz en bande X :

$$\epsilon_m = 4,49 \quad \Delta\epsilon_m = \pm 0,06$$

#### IV - ECHANTILLON DE TGS

Pour compléter l'étude de substances anisotropes, nous avons effectué de longues recherches pour nous procurer un échantillon biaxe convenable ; en effet, les substances biaxes courantes sont ou très absorbantes ou disponibles seulement en épaisseur insuffisante.

Tout récemment enfin, le Laboratoire de Spectrométrie Physique de la Faculté des Sciences de Grenoble a pu nous fournir un des plus gros cristaux de T G S qu'il a réussi à fabriquer, et avec lequel nous avons obtenu un échantillon parallélépipédique de 25 mm de longueur. Cette substance possède les propriétés d'un corps biaxe (80), mais ses défauts cristallins et sa faible longueur ont gêné la précision de nos mesures. Nous avons cependant pu constater que la vibration émergente ne présentait ni rotation ni ellipticité mesurables, ce qui est en accord avec nos conclusions théoriques.

#### V - EXAMEN PAR REFLEXION D'ECHANTILLONS METALLIQUES

##### OU TRES ABSORBANTS

##### A) Lames de cuivre pur

Nous avons utilisé le montage réflectométrique en guides de section carrée ou cylindrique. Les deux montages nous ont donné des résultats identiques. Les courbes VIII - 46 à 48 indiquent la rotation



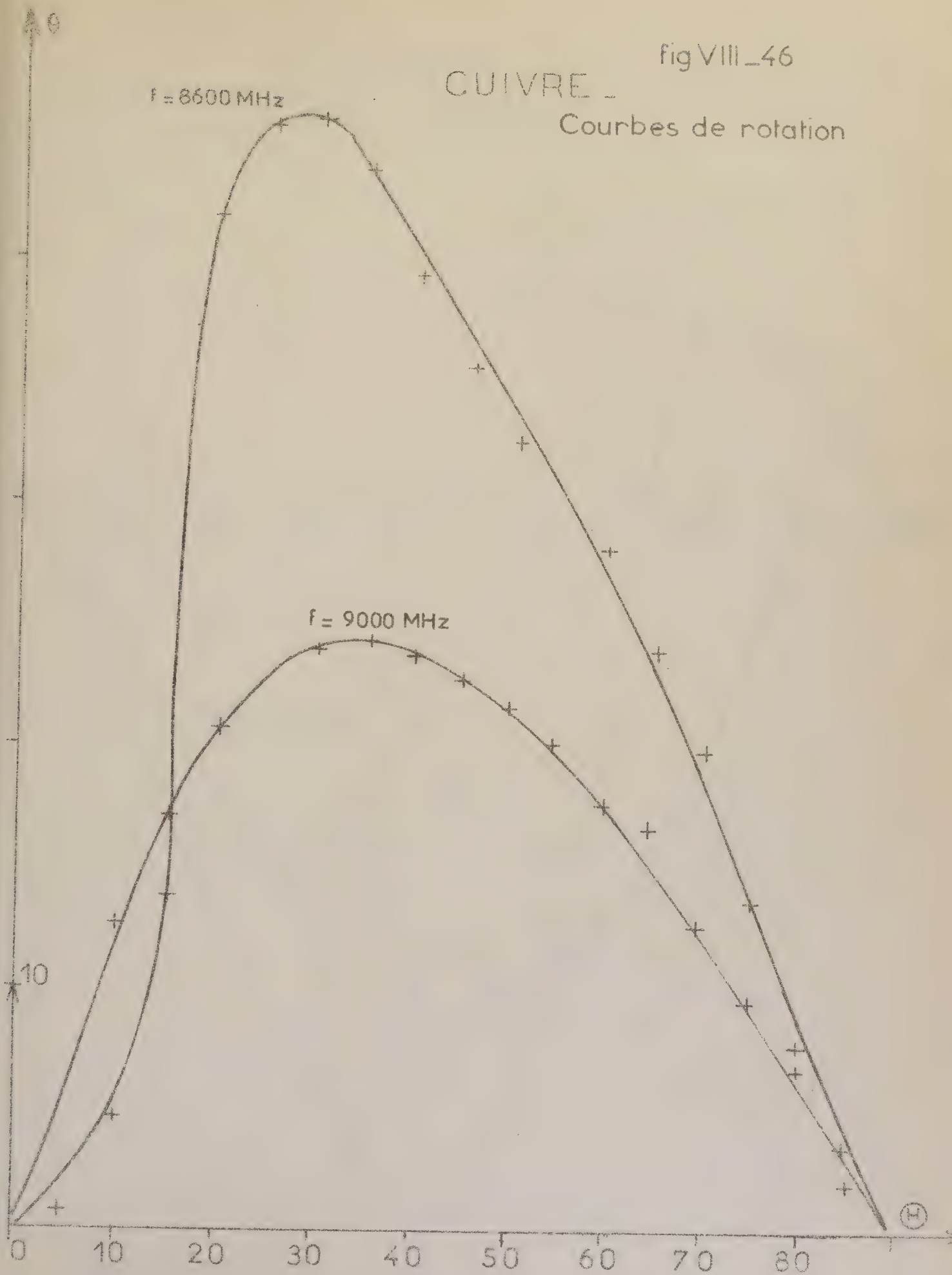
fig VIII\_46

CUIVRE -

Courbes de rotation

$f = 8600 \text{ MHz}$

$f = 9000 \text{ MHz}$





CUIVRE  
Courbes de rotation

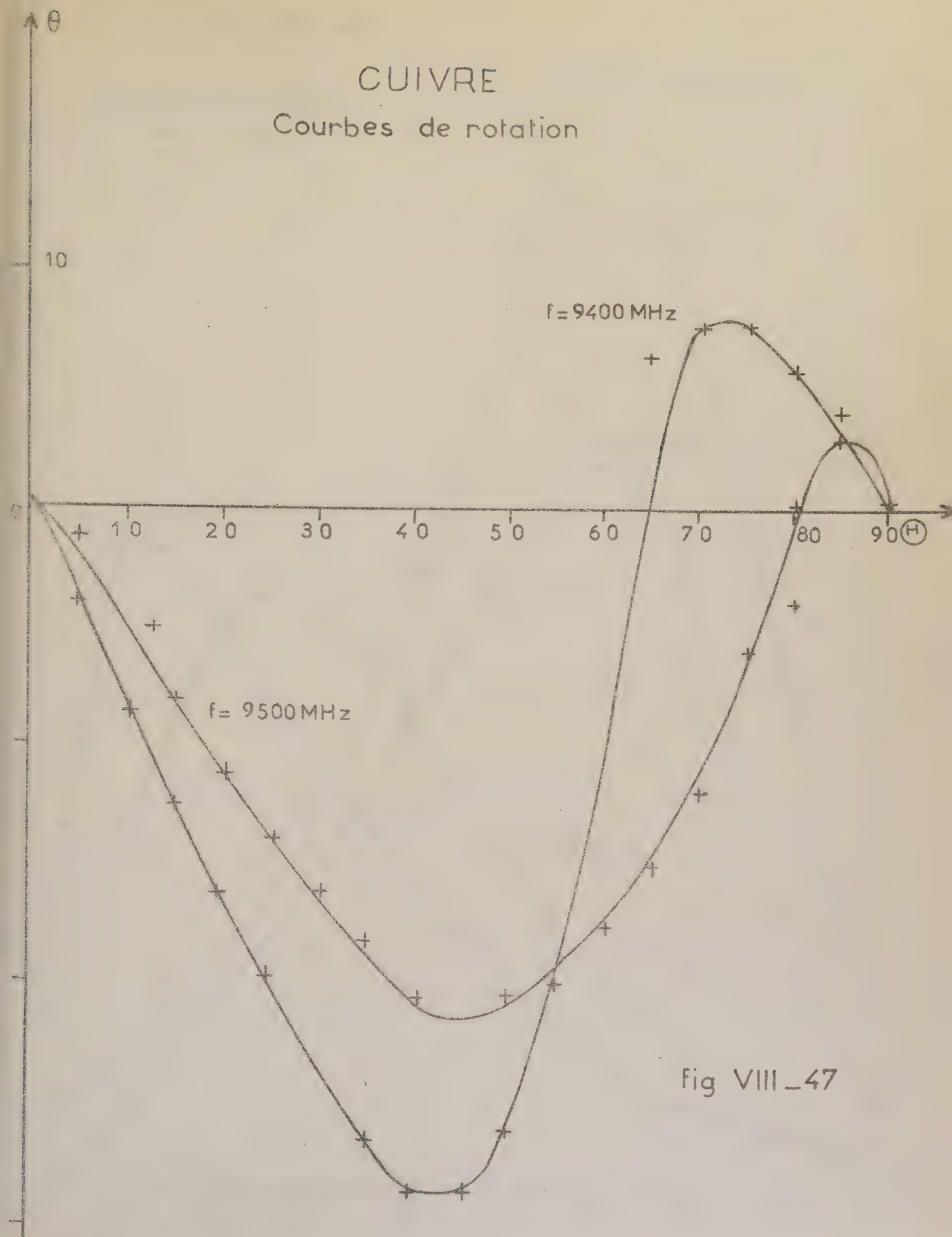


fig VIII-47

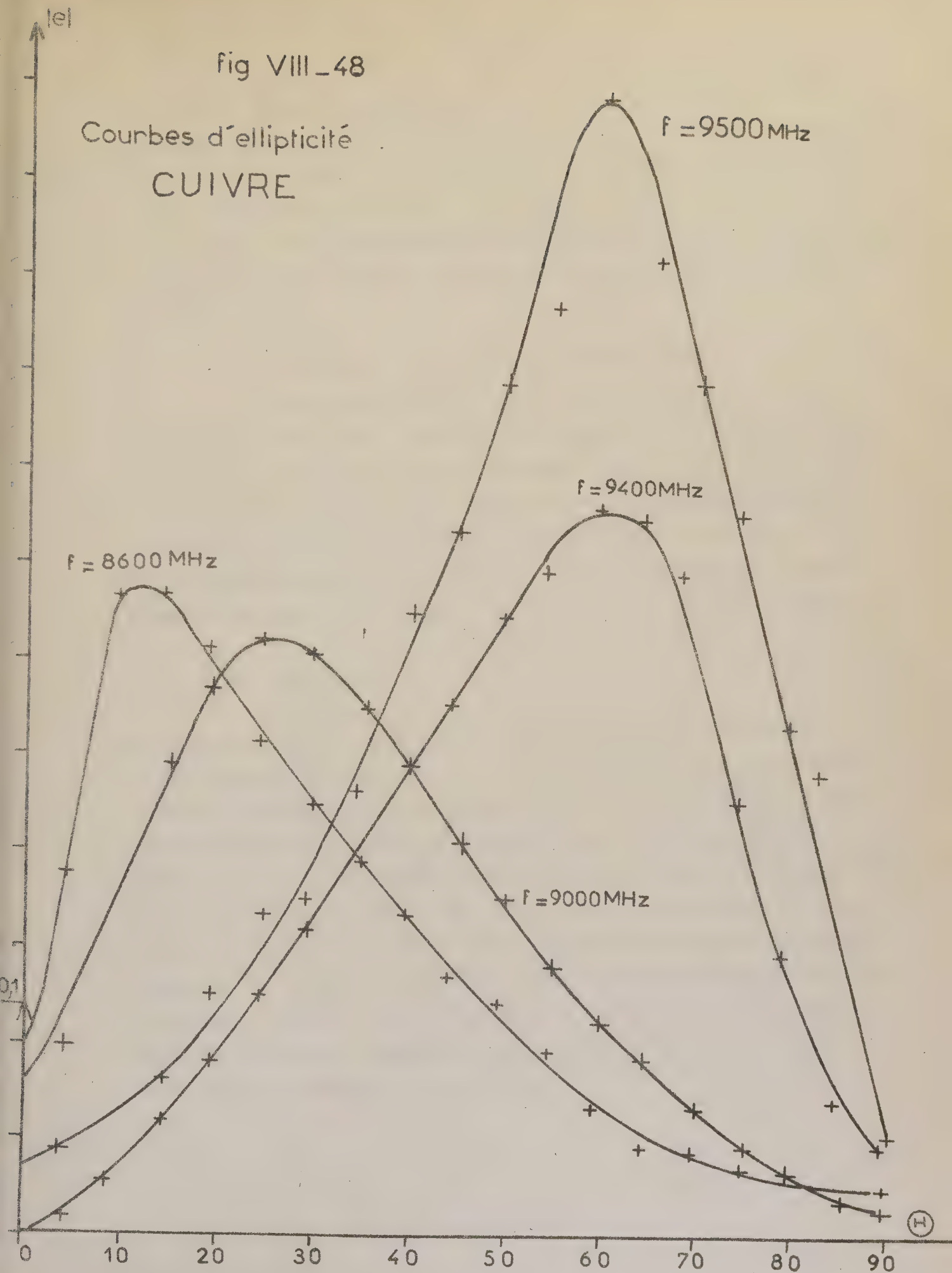




fig VIII-48

Courbes d'ellipticité

CUIVRE





du plan de polarisation et l'ellipticité de la vibration réfléchie en fonction de l'angle  $\theta$ , fait par le plan de polarisation de l'onde incidente avec la normale au plan d'incidence. La vibration réfléchie n'est rectiligne que pour  $\theta = 0$  ou  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , correspondant à une onde initiale de polarisation s ou p seulement. Ce fait confirme bien à posteriori que les coefficients  $R_{ps}$  et  $R_{sp}$  sont nuls et que le déphasage est dû à la forme complexe de  $R_{pp}$ .

#### B) Lames de ferrite à faible résistivité (39)

-----

Nous avons étudié une lame de ferrite dont la faible résistivité ne permettait pas l'examen par transmission. Il s'agissait d'un disque de 40 mm de diamètre et de 5 mm d'épaisseur, fabriqué par R. T. C. - La Radiotechnique. Ce matériau possède une grande perméabilité magnétique et une grande conductivité électrique qui le destinent uniquement à la réalisation de circuits magnétiques pour basses fréquences. Les figures VIII - 49 et 50 mettent en évidence ce phénomène de résonance gyromagnétique qui se produit aux alentours d'un champ de 0,16 Tesla.

#### VI - CONCLUSION

Les résultats expérimentaux confirment la théorie de la propagation ou de la réflexion sur un matériau anisotrope ; ils montrent en particulier l'existence des lignes neutres du cristal, celle des deux vibrations transmises et du déphasage existant lors de la réflexion. D'une façon quantitative, les courbes obtenues permettent de déterminer par comparaison avec des courbes tracées théoriquement les valeurs de la permittivité de l'échantillon. Ce travail a été effectué pour des échantillons de quartz étudiés par transmission, grâce au Centre de Calcul numérique de la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand, et il semble logique de penser qu'une programmation différente permettrait de tracer théoriquement les courbes correspondant aux phénomènes par réflexion. Nous n'avons pas entrepris ce travail, car le matériau ferromagnétique employé est un corps complexe n'ayant pas une composition chimique précise.

-----



# FERRITE

## Courbes de rotation

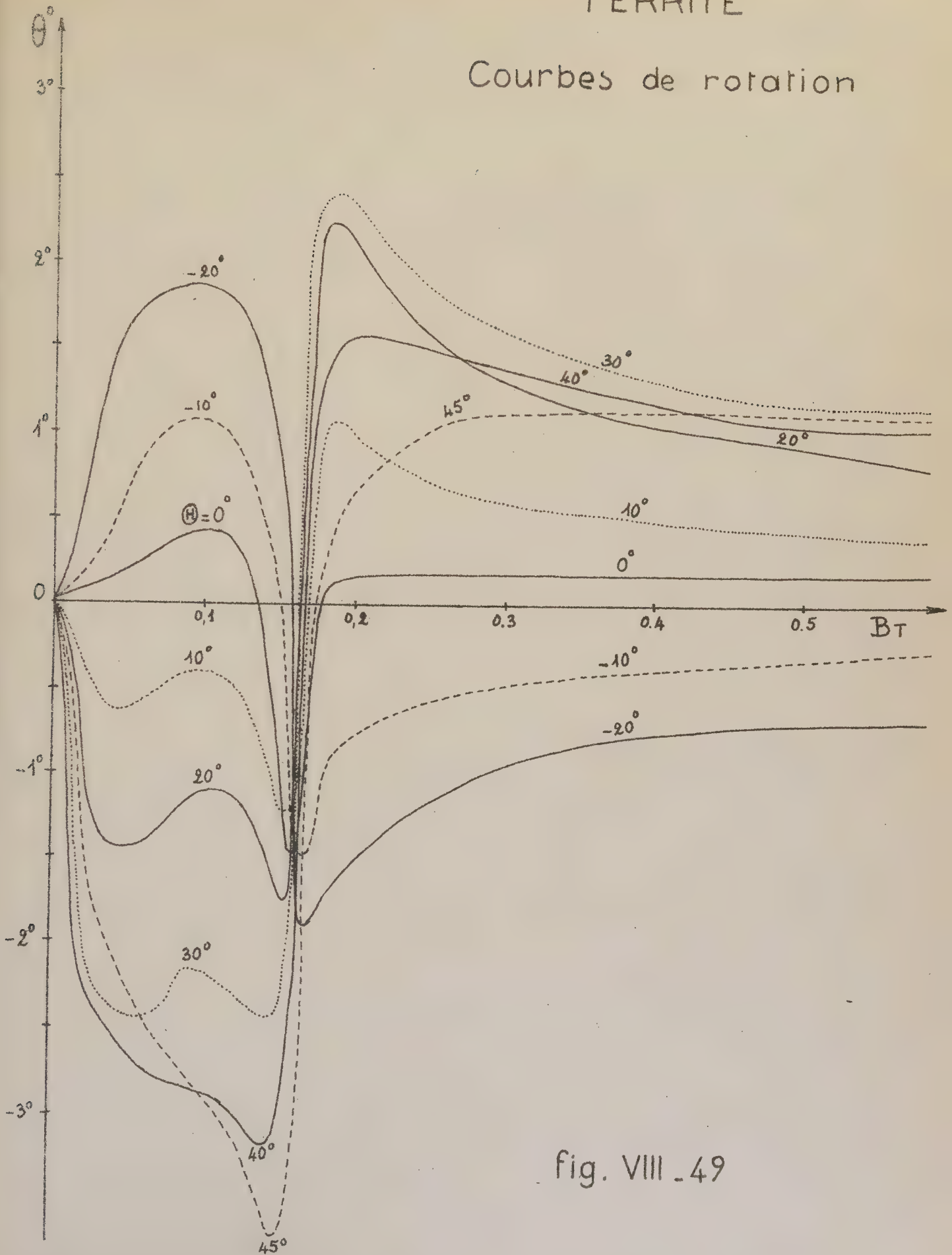
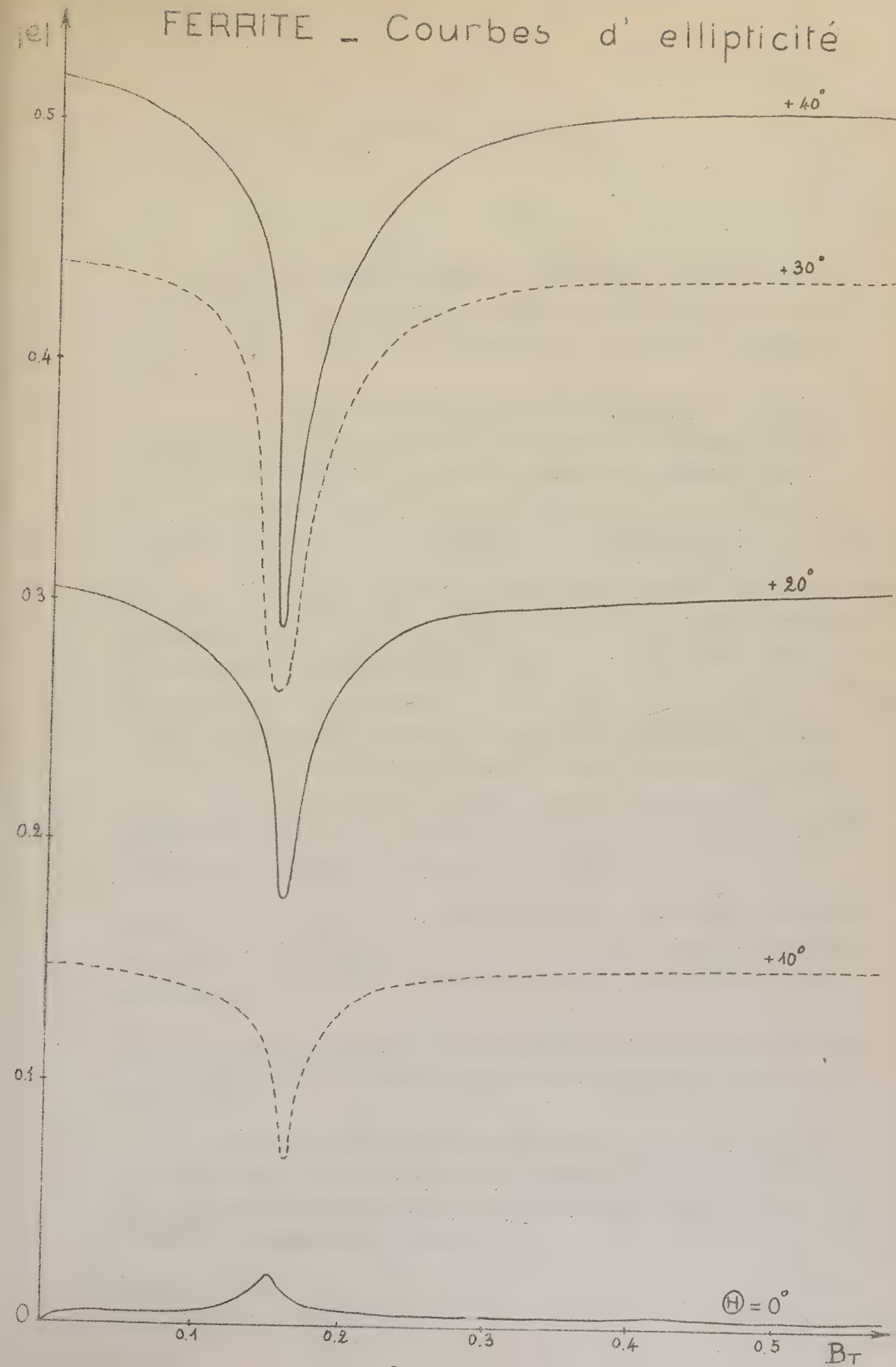


fig. VIII - 49





# FERRITE - Courbes d'ellipticité





## C O N C L U S I O N

-----

Dans les pages qui précèdent, nous venons d'examiner l'action d'une substance anisotrope sur la propagation guidée d'une onde électromagnétique, tant sur le plan théorique que sur le plan de la technique expérimentale.

Cette étude donne dans les chapitres théoriques les résultats mathématiques liant les paramètres d'anisotropie de l'échantillon aux grandeurs caractéristiques des modes de propagation guidée de l'onde.

Nous avons montré que lorsqu'un échantillon anisotrope remplit une section de guide, il existe toujours deux vibrations de même pulsation.

Pour un guide de section rectangulaire, lorsque l'axe optique est parallèle à un des côtés de sa section droite, les deux modes fondamentaux ont même structure et sont orthogonaux entre eux. Ceci permet d'obtenir des phénomènes polarimétriques analogues à ceux de l'optique lumineuse. Mais, à la différence de cette dernière, pour une onde radioélectrique-guidée, on obtient des résultats différents lorsque l'axe optique est parallèle à la direction de propagation, ou lorsqu'il s'agit d'un échantillon biaxe.

Dans le premier cas, l'onde incidente ne donne pas nécessairement naissance à un vrai couple d'ondes orthogonales, ce qui ne permet pas d'obtenir des phénomènes polarimétriques classiques.

Dans le second cas, l'existence de deux vibrations à structure identique et confondues dans l'espace ne se traduit que par un phénomène de battement longitudinal, bien que les vitesses de propagation soient différentes.

En guide circulaire, nous avons limité notre étude aux modes TE et TM, puisque seuls ces derniers peuvent apparaître lors de l'application expérimentale.

Lorsque la lame cristalline étudiée est du type uniaxe et de taille parallèle à l'axe, il existe deux séries de modes ayant même structure, mais orthogonaux entre eux. La première admet l'axe lent comme axe de symétrie, l'autre, l'axe rapide.

./...



Les modes fondamentaux permettent donc d'obtenir en sortie une vibration elliptique comme en optique classique. Les vitesses de propagation peuvent être calculées à partir des vitesses de propagation guidée en milieu isotrope, avec la méthode dite des perturbations. Ce calcul montre qu'en première approximation les vitesses cherchées sont égales à celles relatives à la même onde se propageant dans le même guide, rempli d'un échantillon isotrope de permittivité  $\epsilon$  ou  $\epsilon'$ .

Nous avons déterminé les termes correctifs et indiqué qu'ils tendent vers zéro lorsque le rayon du guide croît.

Si l'on étudie un cristal uniaxe, taillé perpendiculairement, les deux vibrations existantes ne présentent ni structure ni disposition permettant une vibration elliptique de sortie.

Enfin, si l'on place dans le guide un échantillon biaxe dont une des directions principales est parallèle à l'axe de propagation, le phénomène le plus intéressant concerne les modes TE exclusivement utilisés sur le plan expérimental. En effet, ils se propagent comme si le cristal étudié ne possédait, comme un simple échantillon uniaxe, que les deux permittivités  $\epsilon$  et  $\epsilon'$ .

Malheureusement, l'étude par transmission n'est possible que pour des matériaux transparents aux ondes centimétriques.

Nous avons donc songé à une étude réflectométrique sous incidence oblique. L'onde incidente et l'onde réfléchie se propagent dans deux guides orthogonaux coupés en leur point de rencontre par le plan de réflexion, le miroir est constitué par une lame épaisse de l'échantillon à étudier, que l'on peut soumettre à un champ extérieur équatorial. Nous avons calculé les coefficients de réflexion dans le cas général où l'anisotropie peut se représenter sous la forme d'une matrice antisymétrique. Nous avons alors trouvé que seuls existent les coefficients  $R_{ss}$  et  $R_{pp}$  et qu'ils ne sont pas tous les deux purement réels, ce qui permet d'expliquer la rotation et l'ellipticité de l'onde réfléchie lorsqu'on utilise un miroir conducteur isotrope.

Nous avons ensuite examiné les techniques expérimentales que nous avons mis au point au Laboratoire.

Il nous paraît intéressant de noter que nous avons en particulier imaginé une technique de mesure par modulation du plan de polarisation,







Nous avons ensuite examiné les techniques expérimentales que nous avons mis au point au Laboratoire.

Il nous paraît intéressant de noter que nous avons entre autre imaginé une technique de mesure par modulation du plan de polarisation, permettant de repérer avec un seul pointé d'un analyseur quadratique, la position de la vibration étudiée.

Nous avons pu obtenir le même résultat à l'aide d'un analyseur à détection linéaire homodyne, dont un autre point d'intérêt consiste en sa possibilité de travailler à très faible niveau.

Enfin la méthode de fabrication par galvanoplastie des éléments de guide nous paraît posséder un intérêt technologique important, en raison de sa fiabilité de fabrication.

L'exposé des résultats expérimentaux obtenus à l'aide des appareils décrits permet de vérifier à posteriori nos résultats théoriques et confirme ainsi leur réalité physique.

Ces mesures ont été réalisées par une équipe de chercheurs et de collaborateurs qui ont pu ainsi mener à bien un travail qu'il m'était matériellement impossible de réaliser. Le tracé des courbes théoriques, grandement facilité par l'usage d'une machine calculatrice électronique, permet, par comparaison avec les courbes expérimentales, de déduire les valeurs des permittivités en onde centimétrique de l'échantillon étudié.

Finalement, toute notre étude sur la propagation d'une onde électromagnétique guidée a permis de mettre au point de nouvelles méthodes de détermination de l'anisotropie d'un échantillon.

-----



B I B L I O G R A P H I E

= = = = =

- ( 1 ) - A. KASTLER - CR. Acad. Sci. Fr. 1949 - 228 - N° 21, p. 1640
- ( 2 ) - A. KASTLER - " " " " 1950 - 231 - N° 25, p. 1462
- ( 3 ) - Paul S. EPSTEIN - Rev. of modern Phys. - 1956 - 28 - N° 1
- ( 4 ) - H. GAMO - J. Phys. Soc. Japan. 1953 - 8 - N° 2, p. 176
- ( 5 ) - A.A. TH. M. VAN TRIER - Thèse d'Université Delft - 1953
- ( 6 ) - J. SOUTIF GUICHERD - Thèse de Doctorat d'Etat - Grenoble - 1957
- ( 7 ) - R. FANGUIN - Thèse de Doctorat d'Etat - Clermont-Fd - 1962
- ( 8 ) - R. SARDOS - Thèse de Doctorat d'Etat - Bordeaux - 1965
- ( 9 ) - Y. SERVANT - Thèse de Doctorat d'Etat - Bordeaux - 1968
- (10) - P. LOUDETTE - Thèse de Doctorat d'Etat - Bordeaux - 1956
- (11) - A. BOTTREAU - Thèse de Doctorat d'Etat - Bordeaux - 1969
- (12) - R. DELEUIL - Thèse de Doctorat d'Etat - Aix-Marseille - 1969
- (13) - W. WALKINSHAW - Journ. Appl. Phys. 1949 - 20, p. 634
- (14) - R. COMBE et FEIX - Il Nuovo Cimento - 1960 - 15, p. 760
- (15) - G. RITOUX - Thèse de Doctorat 3 ème cycle - Clermont-Fd - 1968
- (16) - VAN HIPPEL - Handbook of Physics - Mc. Graw - Hill Book Company  
New-York - 1967
- (17) - R. SARDOS - Comm. Colloque Ampère - Bordeaux - 1963
- (18) - THIRION de BRIEL - Mémoire de Stage Institut Sup. Matériaux -  
St Cuen
- (19) - CHARRU et BRETENOUX - Comm. Colloque Optique Ultra-hertzienne -  
Clermont-Fd - 1968
- (20) - J. LEBRUN - Thèse de Doctorat d'Etat - Lille - 1953
- (21) - J.D. CUTNELL, D.E. KRANBUCHL, E.N. TURNER et W.E. VAUGHAN -  
Rev. Sci. Instr. 1969 - 40 - N° 7, p. 908
- (22) - G. DELBOS - J. Phys. - 1964 - 25 - N° 11, p. 194 A
- (23) - G. RAOULT - Les ondes Centimétriques - Masson - Paris - 1958
- (24) - L.G. HEUXLEY - Waves Guides - Université Press Cambridge - 1947



- (25) - R. RIGAL - Les Hyperfréquences - Eyrolles - Paris - 1950
- (26) - NAJIM et J.C. MATHEAU - Comm. Colloque Optique Ultra-hertzienne - Clermont-Fd - 1968
- (27) - F. PICHERIT - Thèse de Doctorat 3ème Cycle - Bordeaux - 1959
- (28) - F. BLANC, R. FANGUIN, G. RAOULT - Inter. Electronique - 1969 - N° 4, p. 46
- (29) - R. SARDOS - Comm. Soc. Sc. Phys. et Nat. - Bordeaux - 14 Mai 1964
- (30) - D. GUÉRIN - D.E.S. Clermont-Fd - 1967
- (31) - F. BLANC - R. FANGUIN - D. PRADOUX - G. RAOULT - Comm. Colloque Optique Ultra-hertzienne - Bordeaux - 1970
- (32) - A. MARCON - D.E.S. Clermont-Fd - 1954
- (33) - F. BLANC - G. CORNET - R. FANGUIN et G. RAOULT - Inter Electronique - 1966 - N° 9, p. 10
- (34) - C.C. ROBINSON - J. of the Optical Society of America - 1963 - 53 - N° 6
- (35) - M. P. STOLL - J. Phys. - 1965 - 26 - N° 12
- (36) - W. VOIST - Magneto und Elektro-optik - Teubner - Leipzig - 1908
- (37) - CH. PAPAS - Office of Naval Research Report - California Institute of Technologie - 1954 - N° 4
- (38) - S. A. SCHELKUNOFF - Electromagnetic Waves - D. Van Nostrand Company Inc. - New - York - 1943
- (39) - J.C. BERTHOMIER - D.E.S. Clermont-Fd - 1966
- (40) - M. CACHET - J.C. LESTRADE - I. EPELBOIN - J. Chimie Physique - 1965 - p. 802
- (41) - J. GELAS et J.C. LESTRADE - L'onde Electrique - 1966 - 474
- (42) - D. GALATEAU - D.E.S. Clermont-Fd - 1965
- (43) - A. BOUCHE - D.E.S. Clermont-Fd - 1965
- (44) - A. BERGERAT - D.E.S. Clermont-Fd - 1966
- (45) - D. BARATHON - D.E.S. Clermont-Fd - 1965
- (46) - R. BESSEGE - D.E.S. Clermont-Fd - 1965
- (47) - G. GOUBAU - Electromagnetic Waveguides and Cavities - Londres - 1961
- (48) - GUTTON et ORTUSI - C.R. Acad. Sc. - Séance du 27 décembre 1943
- (49) - D. PRADOUX - Thèse de Doctorat 3 ème Cycle - Clermont-Fd - 1970







- (50) - F. BLANC, R. FANGUIN, D. PRADOUX et G. RAOULT - Inter Electronique - 1970 - N° 10, p. 56
- (51) - A. FOREST - D.E.S. - Clermont-Fd - 1966
- (52) - F. BLANC, R. FANGUIN et G. RAOULT - Inter Electronique - 1970 - N° 6, p. 40
- (53) - F. BLANC, R. FANGUIN et G. RAOULT - Comm. Colloque Optique Ultra-Hertzienne - Bordeaux - 1970
- (54) - F. BLANC, R. FANGUIN et G. RAOULT - Inter Electronique - 1968 - N° 1, p. 64
- (55) - R. FANGUIN et G. RAOULT - J. Phys. et Radium - 1954 - 15, p. 133
- (56) - Y. LANDAUD - D. E. S. - Clermont-Fd - 1961
- (57) - POUND - Rev. of Scientific Instruments - 1948 - 17, p. 490
- (58) - P. JUNG - J. Scientific Instruments - 1960 - 37, p. 372
- (59) - VARIAN - Associates data sheet for EPR spectrometer (V 4 500)
- (60) - A.G. SEMENOV et N.N. BOUBNOV - Priory i Tekl. Eksper - 1959 - 1, p. 92
- (61) - C. TERRET - Thèse de Doctorat 3 ème cycle - Bordeaux - 1964
- (62) - L. BONNET - Thèse de Doctorat 3 ème cycle - Clermont-Fd - 1965
- (63) - PASCARU - Rev. Gén. Electronique - 1963 - 17, p. 52
- (64) - J. REED et RAYTHEON Co - Microwave Engineers Handbook - Horizon House - Dedham (Mass.) - 1966 - p. 66 et 67
- (65) - Y. SERVANT - Thèse de Doctorat 3 ème cycle - Bordeaux - 1964
- (66) - F. BLANC, A. BOUCHE, R. FANGUIN et G. RAOULT - Comm. Colloque Optique Ultra-Hertzienne - Bordeaux - 1970
- (67) - F. BLANC, R. FANGUIN et G. RAOULT - Inter Electronique - 1969 - N° 11, p. 31
- (68) - Alan J. SIMMONS - Microwave Journal - 1967 - 10 - N° 12, p. 102
- (69) - J. SALAUZE - Technique de l'Ingénieur - Electricité et Electrotechnique - 1951 - T. III - D - p. 960
- (70) - M. ROOGERS - Practical Electroplating - The Macmillan Co - New-York - 1959 - p. 21
- (71) - F. BLANC - Thèse de Doctorat d'Université - Clermont-Fd - 1967
- (72) - G. RAOULT, J. ADAMSKI, J.P. CUEILLE, C. LAVAL et R. ROUX - J. Phys. et Radium - 1962 - 47 A, p. 23



.../.

- (73) - C. LAVAL - D.E.S. - Clermont-Fd - 1961
  - (74) - F. BLANC, R. FANGUIN et G. RAOULT - **Inter Electronique** - 1969 - 7/8,  
p. 34
  - (75) - F. BLANC, R. FANGUIN et G. RAOULT - Brevet Français C.N.R.S. -  
N° 992.322 - 22 octobre 1964
  - (76) - G. RAOULT, R. FANGUIN et F. BLANC - **Rev. Phys. Appl.** - 1967 - N° 4,  
p. 292
  - (77) - F. BLANC, R. FANGUIN et G. RAOULT - **Inter Electronique** - 1967 - N° 10  
p. 10
  - (78) - P. GRIVET - La Résonance Paramagnétique Nucléaire - C.N.R.S. -  
1955 - p. 141
  - (79) - P.E. TANNENWALD - **Microwave Journal** - 1963 - décembre, p. 61
  - (80) - HADNI - **J. Phys.** - 1969 - 30, p. 377
-



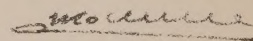
Série : E

N° : 136

VU ET PERMIS D'IMPRIMER  
(Décret n° 67-750 du 29 août 1967)

Clermont-Ferrand, le 22 décembre 1970

Le Doyen,



R. KOHLMÜLLER.











